

جمهوری اسلامی ایران

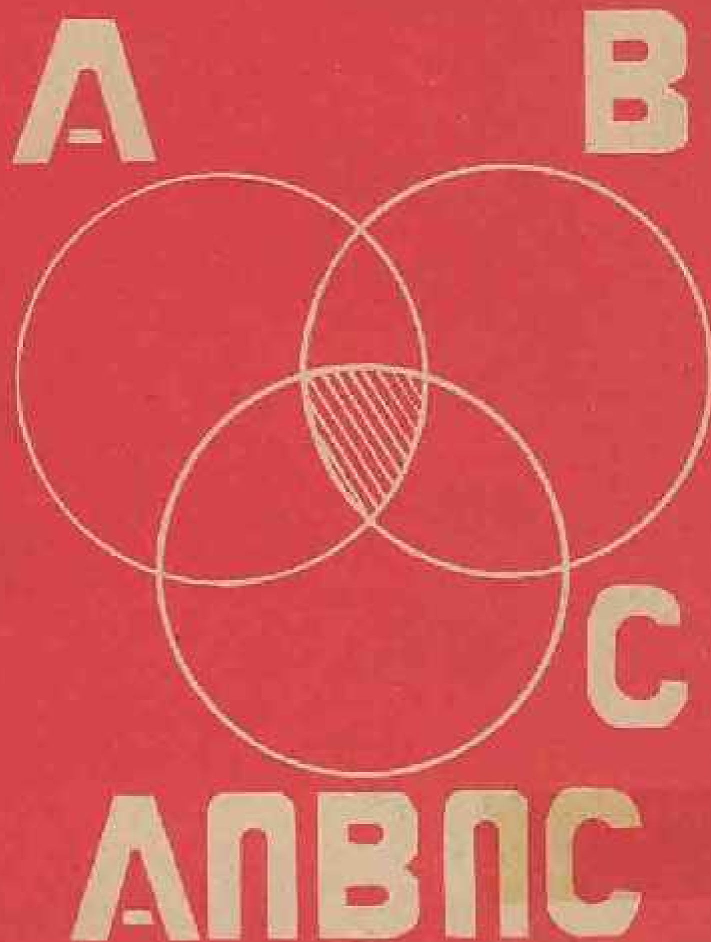
وزارت آموزش و پرورش

سال اول

ریاضیات جدید

آموزش متوسطهٔ عمومی

علوم تجربی و ریاضی



۲۱۱

بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات جدید



سال اول

آموزش متوسطه عمومی

علوم تجربی و ریاضی

مؤلفان: فرشید مین‌باشیان میرزا جلیلی
کارشناسان سازمان کتابهای درسی: غلامرضا عجدی عبدالحسین مصحفی
صفحه‌پرداز: پروین صدر
رسام: خسرو مدیریان

چاپ از:

۱۳۶۱

به‌پیشنهاد دفتر تحقیقات این کتاب در سال تحصیلی ۶۱–۱۳۶۰
درگروه تحقیق دانشگاه اصفهان و دانشگاه صنعتی اصفهان
(متشکل از گروهی از اساتید و دبیران) مورد بررسی و تصحیح
قرار گرفته است.

فهرست

قسمت اول ـ جبر گزاره ها

قسمت دوم ـ نظریهٔ مجموعه‌ها

توجه :

در این کتاب مجموعهٔ

$$\{۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\}$$

را مجموعه اعداد طبیعی یا مجموعه اعداد صحیح مثبت نامیده و آن را با N نشان می‌دهیم

مجموعهٔ $\{\ldots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \ldots\}$

را مجموعه اعداد صحیح نامیده و آن را با Z و مجموعهٔ

$$\left\{\ldots, ۱, \ldots, \ldots, \frac{۱}{۲}, \ldots, ۰, \ldots, -\frac{۱}{۲}, \ldots, -۱, \ldots, \frac{۳}{۲}, \ldots, ۲, \ldots\right\} = \left\{\frac{m}{n} \middle| \begin{matrix} m, n \in Z \\ n \neq ۰ \end{matrix}\right\}$$

را مجموعه اعداد گویا نامیده و آن را با Q نشان می‌دهیم. مجموعه اعداد حقیقی با R نشان داده می‌شود. هر عدد حقیقی که گویا نباشد عدد گنگ نامیده می‌شود.

ژرژ بول[1] (۱۸۶۴ – ۱۸۱۵)

ژرژبول در دوم نوامبر ۱۸۱۵ درشهر لینکلن انگلستان متولد شد . او فرزند دکاندار ساده‌ای بود که از نظر اجتماعی در ردیف طبقهٔ ظرف شویان و پادوهای منزل اشراف بود ، و همین ضعف طبقاتی محرومیتهایی برای او دربر داشت .

ژرژبول ،تحصیلات ابتدایی خود رادر یکی از مدارسی که برای فقیران ودر محل آنها واقع شده بـود تمام کرد . بعد از تحصیلات ابتدایی وارد یك مدرسهٔ بازرگانی شد ولی مطالعات بازرگانی برای او سودمند واقع نگردید ودر سن ۱۶ سالگی ناچار شد برای کمك بهزندگی پدر ومادرش کار تدریس و معلمی را شروع کند و ۴ سال با مهارت در یك مدرسهٔ ابتدایی درس داد و در سن ۲۰ سالگی خود مدرسه‌ای دایر کرد .

درسال ۱۸۴۸ جزوهٔ کوچکی به‌نام «آنالیزریاضی درمنطق» منتشر کرد که درآن هوش ونبوغ وی‌آشکار بود. در سال ۱۸۴۹ به‌سمت استاد ریاضی کوئینزکالج در ایرلند منصوب شد . در سال ۱۸۵۴ کتاب معروف خود را تحت عنوان :

«مطالعاتی دربارهٔ قوانین فکر»

که منطق ریاضی و حساب احتمالات برآنها استوار است منتشرساخت .

ژرژبول به‌رؤیایی که ریاضی‌دانان نامی چون‌لایب‌نیتز و دمورگان‌درمورد «واردساختن منطق درحیطهٔ جبر» داشتند ، جامهٔ عمل پوشاند . بول منطق را به‌نوعی جبرساده وآسان تبدیل کرد . او استدلال دربارهٔ یك موضوع را به‌وسیلهٔ دستورهای سادهٔ جبری بیان کرد .

منطق علامتی بول (جبرگزاره‌ها) سالهای متمادی بعداز اکتشاف مورد توجه قرار نگرفت ولی‌امروز منطق ریاضی‌یکی ازشاخه‌های مهم ریاضی‌است و زبان منطق‌زبان محاسبه‌در کامپیوتر است . بول خیلی بعداز انتشار اثر بزرگ خویش زنده نماند و درسال ۱۸۶۴ درسن ۵۰ سالگی درحالی که غرق افتخارات بود و روز به‌روز برشهرتش افزوده می‌شد براثر ذات‌الریه درگذشت . برتراندراسل فیلسوف و ریاضی‌دان انگلیسی دربارهٔ او می‌گوید : ژرژبول درسال ۱۸۵۴ با انتشار کتاب «قوانین فکر» ریاضیات محض راکشف کرد و این نشان اهمیتی است که امروز برای منطق ریاضی و شاخه‌های متعدد آن قائل هستند .

1- George Boole

قسمت اول ــ جبرگزاره‌ها

فصل ۱

گــــــــزاره‌ها

استدلال و زبان ریاضی

مقدمه ــ شما مسلماً در زندگی عادی برای آن‌که شنوندهٔ دیر باوری را متقاعد کنید مجبور به‌بیان دلیل و برهان شده‌اید . مثلا ، موقعی که به‌دوستان خود می‌گویید تیم فوتبال A بهتر از B بازی می‌کند ، ممکن است بعضی از آنها این حرف را به سادگی نپذیرند و شما مجبور شوید امتیازاتی راکه دو تیم اخیراً در بازیهای مختلف کسب کرده‌اند ارائه دهید :

تیم A	۱۰ برد	۲ باخت
تیم B	۶ برد	۳ باخت

یا وقتی به‌عده‌ای می‌گویید گاز هلیم سبکتر ازهواست شاید باور نکنند وشما به‌ناچار برای اثبات نظر خود بادکنکی را پراز هلیم کرده نشان می‌دهید که بادکنك بالا می‌رود.

در ریاضیات نیز وقتی می‌گویید «مجموع دوعدد زوج ، عددی است زوج» ممکن است کسی درصحت آن شك کند و شما مجبور شوید به‌ترتیب زیر توضیح دهید :

الف ــ فرض کنید دو عدد a و b زوج باشند .

ب ــ طبق این فرض و تعریف عدد زوج دارید : $a=2k$ و $b=2k'$.

ج ــ ازجمع a و b خواهیدداشت : $a+b=2k+2k'$ (k و k' اعداد صحیح هستند).

د ــ با توجه به توزیع‌پذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع می‌نویسید:

$$a+b=2(k+k')$$

هـ ــ با توجه باین که مجموع دو عدد صحیح یك عدد صحیح‌است بنابرتعریف عدد زوج ، $a+b$ یك عدد زوج است.

در بحثهای فوق به طریقی از استدلال استفاده شده است. چون بسیاری از نظریه‌های جدید در نتیجهٔ استدلال بوجود آمده است و ما در مطالعهٔ رشته‌های مختلف ریاضی به استدلال احتیاج داریم ، لذا لازم است فراگیریم که چطور استدلال کنیم . روشن است که در ریاضیات برای استدلال کردن احتیاج بدانستن اصطلاحات ، تعاریف وعلاماتی داریم که با کمك آنها بتوانیم مطالبی را

که منظور ماست به‌طور دقیق بیان کنیم . به‌عبارت دیگر ، برای استدلال کردن واستدلال دیگران را فهمیدن قبل از همه چیز باید با زبانی که دراین زمینه به‌کار برده می‌شود آشنا شویم .

درزبان محاوره‌ای ممکن است یك کلمه یا یك جمله در متنهای مختلف یا در شرایط مختلف و حتی در بیانهای مختلف ، معانی متفاوتی داشته باشد . مثلا جملهٔ « حالا ساعت شش بعداز ظهر است» ، با بیان عادی ، یك جملهٔ ساده است که ساعت ۶ را خبر می‌دهد . ولی فرض کنید که شما صبح به‌پدرتان قول داده‌اید که ساعت ۶ بعداز ظهر در منزل خواهید بود ، اتفاقاً بعدازظهر ساعت ۷ بمنزل می‌رسید . پدرشما که در منزل منتظر بوده است بـا دیدن شما با ناراحتی و تندی سؤال می کند « حالاساعت شش‌بعدازظهر است ! » معنی این‌جمله دراینجا مسلماً بامعنی قبلی‌آن فرق‌دارد. در اینجاگوینده می‌خواهد با تأکید بیان کند که حالا ساعت ۶ نیست .

یا وقتی رادیو وضع هوا را که قبلا ادارهٔ هواشناسی پیش‌بینی کرده پخش می کند ومی‌گوید «هوا رو به‌گرمی است» از این جمله در زمستان ، بعداز یك برف وسرمای شدید، استنباط می‌شود که از شدت سرما و برف‌کاسته خـواهد شد و درجهٔ حرارت بصورت عادی برخواهدگشت . در صورتی که مفهوم این جمله در شروع تابستان این است که درجهٔ حرارت‌هوا کم‌کم دارد از °۳۰ سانتیگراد تجاوز می کند .

یا شما در یك زمستان ، ممکن است بـا مشاهدهٔ چند روز جمعه که اتفاقاً هوا بارانی بوده است بگوید « دراین زمستان هرجمعه هوا بارانی است » ، در صورتی کـه در همان زمستان شما جمعه‌هایی که هواکاملا آفتابی بوده است نیز داشته‌اید .

یا شما در امتحانات پس ازگذراندن چند امتحان بگویید «من همیشه درامتحانات بدشانسی می‌آوردم» در صورتی که در همان امتحانات ممکن است نمرات بسیار خوب هم‌گرفته باشید .

اما ریاضیات یك ابزار اصلی علوم است و از ویژگیهای آن این است‌که نظریه‌ها را دقیق بیان می‌کند . لذا زبان ریاضی باید دقیق باشد . در ریاضیات ما نمی‌توانیم از آزادیهایی که در زبان محاوره‌ای داریم برخوردارباشیم . مثلا وقتی می‌گوییم « در هر مثلث متساوی‌الساقین دو ساق با هم برابرند » کلمهٔ هردر اینجا طوری به‌کار رفته است که مطلب فوق درهمهٔ موارد درست است. به‌عبارت دیگر ، هیچ مثلث متساوی‌الساقینی وجود ندارد که دو ساق‌آن مساوی نباشند .

یاجملهٔ «یك‌عدد طبیعی‌اول‌است، هر گاه فقط دارای دومقسوم‌علیه متمایزمثبت باشد». دقیقاً تعریف یك‌عدد اول‌را به‌ما می‌دهد طوری که بااین‌تعریف می گوییم «عدد ۷ اول‌است» و«عدد ۱۲ اول نیست» .

هدف از این بخش، آشنایی با زبان ریاضی و یادگیری اصطلاحات، تعاریف و علامـات لازم دراین زمینه می باشد.

گزاره

به‌جملات زیر گزاره می‌گویند :

– عدد ۲۳ اول است

– ۲ کوچکتر از ۳ است

– عدد ۱۲ اول نیست

– نیمساز زاویه ، زاویه را نصف می‌کند

جملهٔ :

«۶ عدد اول است»

نیز یك گزاره می‌باشد .

گزاره جمله‌ای است خبری که یا درست یا نادرست باشد (اگر چه بر ما معلوم نباشد که درست یا نادرست است)

به‌عبارت دیگر ،

۱– هر گزاره یا درست یا نادرست است .

۲– یك گزاره نمی‌تواند هم درست وهم نادرست باشد .

مثلا :

– ۵>۲ ، یك گزارهٔ درست است .

– ۳>۷ یك گزارهٔ نادرست است .

– {۲ ، ۳}∋۲ یك گزارهٔ درست است .

اگرگزاره‌ای درست باشد گوییم ارزش درستی آن یا به طور خلاصه ارزش آن درست است اگرگزاره نادرست باشد ،گوییم ارزش‌آن نادرست است .

درست یا نادرست بودن ارزش گزاره‌ها را با حروف اول این کلمات یعنی :

« د »   ،   « ن »

نمایش می‌دهیم . جملات :

نیوتن یك ریاضی‌دان بزرگ بود

زمین بەدور خورشید می‌گردد .

افلاطون یك فیلسوف چینی بود .

تهران پایتخت ایران است .

با وجودی که جملات ریاضی نیستند ولی بازگزاره خوانده می‌شوند . جملات :

«جمعه پیش ما بیا»

«تخته سیاه را پاك کن»

«چه برف سنگینی !»

گزاره نیستند . زیرا ، مفهوم درستی یا نادرستی ازآنها استنباط نمی‌شود .

بعضی اوقات ما فوری نمی‌توانیم بگوییم که یک جمله درست یا نادرست است . مثلا «عدد ۱۹۱۷ اول است» ، در اینجا برای بیان درستی یا نادرستی این جمله احتیاج به‌اطلاعاتی درمورد تعیین اعداد اول داریم . ولی چون بهرحال از دوصورت خارج نیست و این جمله یا درست یا نادرست می‌باشد ، لذا یک گزاره است . جملات :

«در کرهٔ مریخ گیاه وجود دارد»

«حسین دانشجو است»

نیز از همین قبیل است وگزاره می‌باشند .

گزاره نما

قبل از بحث راجع به‌گزاره نما ، مطلب زیر را یادآوری می کنیم .

متغیر علامت یا حرفی است که می‌تواند نمایشگرهرعضو یک مجموعه باشد . متغیررا معمولا با حروف x ، y ، z ، . . . ، نمایش می‌دهند . با توجه بـه تعریف متغیر اکنون به مثالهای زیـر توجه کنید :

مثال ۱ – جملهٔ «$0<x$» که دارای متغیر x است به‌خودی خود یک گزاره نمی‌باشد . زیرا ، هیچ نوع اطلاعی از x داده نشده است . ولی اگر به‌جای متغیر x ، یک عدد مثبت مثل ۲ بگذاریم دراین صورت خواهیم داشت «$0<2$» که یک گزاره است و درست می‌باشد ، و اگر به‌جای متغیر x یک عـدد منفی مثل ۳– قرار دهیم ، دراین صورت جملهٔ «$0<-3$» بدست می‌آید که یک گزارهٔ نادرست است .

مثال ۲ – جملهٔ «x یک ریاضی‌دان است» نیز یک گزاره نمی‌باشد ولی اگر به‌جای متغیر x ، نیوتن قرار دهیم می‌شود «نیوتن یک ریاضی‌دان است» که یک گزارهٔ درست است و اگر به‌جای x ، سعدی قرار دهیم می‌شود «سعدی یک ریاضی‌دان است» که یک گزارهٔ نادرست می‌باشد .

تعریف – جملاتی مانند «$0<x$» ، «x یک ریاضی‌دان است» یا «$x+y<2$» که شامل یک یا چند متغیرهستندگزاره‌نما خوانده می‌شوند .

در مثالهای فوق اگر به‌جای x ، دفتر یا درخت قراردهیم ، جملات «$0<$دفتر» یا «درخت یک ریاضی‌دان است» حاصل می‌شود که بی‌معنی است . به‌عبارت دیگر ، درهرگزاره‌نما ، عضوهای مجموعهٔ معینی می‌توانند جانشین متغیرشوند تاگزاره‌نما را تبدیل به‌گزاره نمایند . به‌چنین مجموعه‌ای

دامنهٔ متغیر گفته می‌شود .

تعریف ــ همهٔ اشیایی که جانشین متغیر یک‌گزاره‌نما می‌شوند و گزاره‌نما را به یک گزاره تبدیل می‌نمایند ، مجموعه‌ای تشکیل می‌دهندکه به آن دامنهٔ متغیر (یاحوزه‌متغیر) گفته‌می‌شود.

در گزاره‌نمای «$x > 0$» دامنهٔ متغیرمجموعهٔ اعداد حقیقی است ودر «x یک ریاضی‌دان است» دامنهٔ متغیر ، مجموعهٔ انسانهاست .

از طرفی ، درگزاره‌نمای «$x > 0$» هرعضو ازمجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت ، گزاره‌نمای مزبور را به یک‌گزارهٔ درست تبدیل می‌نماید به مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت ، مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای «$x > 0$»می‌گویند . همچنین به‌مجموعهٔ ریاضی‌دانها که هرعضو آن‌گزاره‌نمای «x ریاضی‌دان است» را به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌نماید ، مجموعهٔ جواب‌گفته می‌شود .

تعریف ــ همهٔ عضوهایی از دامنه متغیرکه جانشین متغیر شده و گزاره‌نما را به‌یک‌گزارهٔ‌درست تبدیل می‌نمایند مجموعه‌ای تشکیل می‌دهندکه بنام مجموعهٔ جواب خوانده می‌شود .

سورها

دیدیدکه جملاتی به‌صورت :

$$(1) \qquad x + 2 > 7$$

که شامل متغیر می‌باشندگزاره نیستند . اما این‌گزاره‌نما **یا هرگزاره‌نمای دیگری**[1] را به طرق زیر می‌توان به‌یک‌گزاره تبدیل نمود .

۱ــ سور عمومی ــ به ابتدای‌گزاره‌نما ، یکی ازعبارات زیررا اضافه می‌کنیم .

برای تمام مقادیر ؛ برای هر ؛ برای هرکدام (۲)

و بنویسیم :

برای هر x متعلق به دامنهٔ مفروض ، $x + 2 > 7$

بدین ترتیب‌گزاره‌نمای (۱) ، تبدیل به‌یک‌گزاره می‌شود . زیرا درهرصورت یا درست است یا نادرست . هرکدام از عبارات (۲) یا هرعبارت به‌مفهوم آن را با علامت ،

$$\forall$$

نمایش داده به‌آن سور عمومی می‌گویند . گزاره‌های زیربا سور عمومی بیان شده‌اند :

۱ــ منظورگزاره‌نما با یک متغیر است .

ـ هر عدد صحیح ، مثبت ، منفی یا صفر است .
ـ در هرمثلث ، مجموع زوایای داخلی برابر 180° است .
ـ هرمجموعه ، زیرمجموعهٔ خودش است .
ـ هرچهارضلعی که دو قطرش مساوی باشد مستطیل است .
ـ هرعدد زوجی بر دو قابل قسمت است .

گزاره‌هایی که با سورعمومی بیان می‌شوند وقتی درست هستند که همیشه و درمورد همهٔ اعضا درست باشند . به‌عبارت دیگر :

گزاره‌ای که با سور عمومی بیان می‌شود ، فقط وقتی درست است که دامنهٔ متغیرآن مساوی مجموعهٔ جوابش باشد .

ازگزاره‌های فوق کدام درست است ؟

مثال ۱ ـ گزارهٔ « برای تمام مقادیر x متعلق به مجموعهٔ اعداد طبیعی ، $x+2>7$ » نادرست می‌باشد ، زیرا ، عدد یك متعلق به‌مجموعهٔ اعداد طبیعی (دامنه‌متغیر) است درحالی که گزارهٔ $1+2>7$ ، نادرست می‌باشد . به‌عبارت دیگر ، دامنهٔ متغیر ، مجموعهٔ اعداد طبیعی است وحال آن که مجموعهٔ جواب :

$$\{6 ، 7 ، 8 ، \ldots\}$$

می‌باشد و این دو مجموعه مساوی نیستند .

مثال ۲ ـ گزارهٔ « برای هر x متعلق به مجموعهٔ اعداد طبیعی ، $x+5>4$ » درست می‌باشد . زیرا ، برای هر x متعلق به‌مجموعهٔ اعداد طبیعی ، گزاره نمای $x+5>4$ درست است :

$$1+5>4 \text{ و } 2+5>4 \text{ و } 3+5>4 \text{ و } \cdots \quad (1)$$

و داریم :

$$\text{دامنهٔ متغیر} = \{1 ، 2 ، 3 ، \ldots\}$$
$$\text{مجموعهٔ جواب} = \{1 ، 2 ، 3 ، \ldots\}$$

واین دومجموعه مساویند . برای سهولت به‌جای نوشتن همهٔ گزاره‌های مندرج در قسمت (۱) به‌طور خلاصه می‌نویسیم :

$$\forall x \in N ، x+5>4$$

و می‌خوانیم «برای هر x متعلق به‌مجموعهٔ اعداد طبیعی ، $x+5>4$».

مثال ۳ ــ گزاره‌های زیر را با استفاده از سورعمومی $\forall$ بنویسید .

۱ــ هرعدد زوج بر دو قابل قسمت است .

۲ــ برای هرعدد طبیعی x ، $x^2 \geqslant x$

۳ــ برای هرعدد طبیعی x ، $x(x+1)$ بر دو قابل قسمت است .

حل :

$1- \ \forall x \in$ مجموعهٔ اعداد زوج ، $x = 2k$ ‏ (k عدد صحیح است)

$2- \ \forall x \in$ مجموعهٔ اعداد طبیعی ، $x^2 \geqslant x$

$3- \ \forall x \in$ مجموعهٔ اعداد طبیعی ، $x(x+1) = 2n$ ‏ (n عدد طبیعی است)

۲ــ سور وجودی ــ راه دیگر برای تبدیل گزاره‌نمای $x+2>7$ یا هر گزاره‌نمای دیگری به‌یك گزاره این است که به‌ابتدای گزاره‌نما ، یکی از عبارات زیررا اضافه‌کنیم :

برای بعضی مقادیر ؛ اقلا برای یك مقدار ؛ مقداری وجود دارد (۱)

و بنویسیم :

برای بعضی مقادیر x متعلق به‌مجموعهٔ اعداد طبیعی ، $x+2>7$

هرکدام از عبارات (۱) را با علامت

$\exists$

نمایش داده به‌آن سور وجودی می‌گویند . گزاره‌های زیربا سور وجودی بیان شده‌اند :

ــ بعضی مثلثها متساوی‌الساقین هستند .

ــ بعضی اعداد زوج بردو قابل قسمت نیستند .

ــ بعضی انسانها باهوش هستند .

ــ برای بعضی مقادیر x ، $x \in \varnothing$.

گزاره‌هایی که با سوروجودی بیان‌می‌شوند فقط وقتی درست هستندکه اقلا دارای یك جواب درست باشند .

به‌عبارت دیگر :

یك گزاره نمای همراه با سور وجودی فقط وقتی درست است که مجموعهٔ جواب آن تهی نباشد .

از گزاره‌های فوق کدامها درست هستند ؟

مثال ۱ ــ گزارهٔ « برای‌بعضی مقادیر x متعلق به‌مجموعهٔ اعداد طبیعی ، $x+3<2$ » یك گزارهٔ نادرست می‌باشد . زیرا هر عدد طبیعی که جانشین x شود یك‌گزارهٔ نادرست به‌دست می‌آید

به عبارت دیگر[1]

$$\varnothing =$$ مجموعهٔ جواب

مثال ۲ – گزارهٔ « برای بعضی مقادیر x متعلق به مجموعهٔ اعداد طبیعی ، $x+3<6$ » درست می‌باشد . زیرا ، اگر به‌جای x اعداد طبیعی قرار دهیم گزاره‌های زیر به‌دست می‌آید که اقلا یکی از آنها درست است .

$$(1) \qquad 1+3<6 \text{ یا } 2+3<6 \text{ یا } 3+3<6 \cdots$$

به‌عبارت دیگر ، مجموعهٔ جواب مساوی {۲ و ۱} است که غیرتهی می‌باشد .

برای سهولت به‌جای نوشتن همهٔ گزاره‌های قسمت (۱) می‌نویسیم :

$$\exists x \in N \ , \ x+3<6$$

و می‌خوانیم « بعضی مقادیر x متعلق به‌مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارند بطوریکه ، $x+3<6$ »

مثال ۳ – گزاره‌های زیررا با استفاده از سور وجودی $\exists$ بنویسید .

۱– بعضی از اعداد اول زوجند .

۲– بعضی از ذوزنقه‌ها متساوی‌الساقین هستند .

۳– بعضی دانش‌آموزان با هوش هستند .

حل :

$1-\ \exists x \in P \ , \ x=2k$ «P مجموعهٔ اعداد اول و k عدد طبیعی است»

$2-\ \exists ABCD \in$ مجموعهٔ ذوزنقه‌ها $\ , \ AD=BC$

$3-\ \exists x \in$ مجموعهٔ دانش‌آموزان ، x باهوش است

۳– سور صفر – یك راه دیگر برای تبدیل گزاره‌نمای «$x+2>7$» ، یا هر گزاره‌نمای مشابه به‌یك گزاره آن است که به‌آن گزاره‌نما یکی ازعبارتهای زیر (یاعبارتهای هم معنی‌آن) را اضافه کنیم :

برای هیچ مقدار ؛   هیچ ؛   مقداری وجود ندارد

مثلا بنویسیم : « هیچ‌عددی‌متعلق به‌مجموعهٔ‌اعداد‌طبیعی‌وجود ندارد که ، «$x+2>7$» که

۱– گاهی اوقات در بحث از سور وجودی ، حالت خاصی را که مجموعهٔ جواب یك عضوی است،جداگانه‌در نظرمی‌گیرند و آن را سور یکانه نامیده به $\exists!$ نمایش می‌دهند . مثلا ، x زوج و اول است و $\exists! x \in N$ ، $\exists!$.

در این صورت یك گزارهٔ نادرست داریم.

برای سور صفر نماد «$\nexists$» به‌کار می‌رود.

گزاره‌های زیر با سور صفر بیان شده‌اند:

ـ **هیچ مجموعه‌ای عضو خودش نیست.** (**به‌عبارت دیگر: مجموعه‌ای وجود ندارد که عضو خودش باشد**).

ـ **هیچ مربعی لوزی نیست.** (**به‌عبارت دیگر**: مربعی وجود نداردکه لوزی باشد).

ـ **هیچ عدد اولی زوج نیست.** (**به‌عبارت دیگر**: عدداولی وجود ندارد که زوج باشد).

ـ $\nexists x$ و $x \in N$ ، $۲x = ۱۱$

گزاره‌هایی که با سور صفر بیان می‌شوند تنها وقتی درستند که مجموعهٔ جواب آنها تهی باشد.

ازگزاره‌های بالا کدامها درست می‌باشند؟

مثال ۱ ـ گزارهٔ «بەازای هیچ مقدار x متعلق به مجموعهٔ اعداد طبیعی ، $x+۵<۱۲$» نادرست می‌باشد. زیرا مثلا به‌ازای $x=۵$ داریم $۱۰<۱۲$ یعنی مجموعهٔ جواب گزاره‌نما دارای عضو ۵ است و تهی نیست.

مثال ۲ـ گزاره‌های زیررا با استفاده ازنماد $\nexists$ بنویسید:

۱ ـ **عدد اولی که مضرب ۴ باشد وجود ندارد.**

۲ ـ **مثلث قائم‌الزاویه‌ای که متساوی‌الاضلاع باشد وجود ندارد.**

۳ ـ **دانش‌آموزی که تنبل باشد وجود ندارد.**

حل:

$۱-\nexists x \in P$ و $x = ۴k$ «P مجموعهٔ اعداد اول و k عدد طبیعی است»

$۲- \nexists ABC \in$ مجموعهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه و $AB = BC = CA$

$۳- \nexists x \in$ مجموعهٔ دانش‌آموزان و x تنبل است

تعریف ـ گزاره‌هایی‌که باسورعمومی یا سور وجودی یا سور صفر بیان می‌شوند ،گزاره‌های سوری نامیده می‌شوند.

تمرین

۱ـ ازجملات زیر کدام یك گزاره است. ازگزاره‌ها کدام‌یك درست و کدام‌یك نادرست است.

الف ـ عدد «۱۳۲۸۱» اول است.

ب ـ اولین زن فضانورد روسی بود .
ج ـ عدد ۲ را روی تخته سیاه بنویس .
د ـ x یك عدد صحیح نسبی کوچکتر از ۹ است .
ه ـ دکتر آلبرت شوایتزر یك پزشك فداکار بود .
و ـ $x+1=2$
ز ـ چه هوای خوبی !
ح ـ $2\in\{1 ، 3 ، 5\}$
ط ـ $\{2\}\subset\{1 ، 3 ، 5\}$
ی ـ ژرژ کانتور مبتکر نظریهٔ مجموعه‌هاست.

۲ـ هرگاه Z نمایش مجموعهٔ اعداد صحیح باشد . از گزاره‌های زیر کدام درست است :

$$\sqrt{2}\in Z \quad ؛ \quad \sqrt{(-1)^2}\in Z \quad ؛ \quad \varnothing\not\subset Z \quad ؛ \quad \{1 ، 2 ، 5\}\subset Z$$

۳ـ در پرسشهای زیر به‌جای ? عدد یا علامت مناسب بگذارید ، طوری که گزاره‌های حاصل درست باشند .

الف ـ $?\times 7=0$
ب ـ $-3\times ?=-3$
ج ـ $(?+2)^2=25$
د ـ $\frac{10\times 4}{2} \ ? \ 5\times 2$
ه ـ $5+?\notin Z$
و ـ $\frac{8\times ?}{4}\in\{a ، 2 ، \frac{1}{3}\}$
ز ـ $5(?-3)=20$
ح ـ $0 \ ? \ \{0\}$

۴ـ دامنهٔ متغیر گزاره نماهای زیر را تعیین کنید.
« x عدد اول است» ؛ « y شاعر است » ؛ « z ایرانی است »

۵ـ دامنهٔ متغیر گزاره‌نماهای زیر، مجموعهٔ اعدادطبیعی است. مجموعهٔ جواب هر کدام را بنویسید
«x بین یك و دواست» ؛ «x زوج است» ؛ «$x+1<3$» ؛ $x>3$

۶ـ ازگزاره‌های سوری زیر کدام درست است :
الف ـ تمام دختران باهوشتر از پسران هستند .
ب ـ همهٔ اعداد اول فرد هستند .
ج ـ هرعدد طبیعی ، زوج یا فرد است .
د ـ هرزاویهٔ قائمه مساوی 90° است .

هـ ـ برای بعضی از اعداد صحیح x ، $x^2 = 1$.

و ـ اقلا برای یك عدد حقیقی x ، $x^3 = 1$.

ز ـ برای بعضی ازمقادیر a در مجموعهٔ اعداد صحیح نسبی ، a^2 منفی .

ح ـ برای هیچ مقدار از a درمجموعهٔ اعداد حقیقی $a^2 + 1 = 0$ نیست .

ط ـ هیچ نقطهٔ واقع در داخل دایره بر مماس بر آن دایره واقع نیست .

ی ـ بهازای هیچ مقدار x متعلق به مجموعهٔ اعداد صحیح ، $3x < 2x$.

۷ـ گزارههای تمرین ۶ را با استفاده از نمادهای $\exists$ و $\forall$ و $\nexists$ بنویسید .

۸ـ هرگاه $A = \{1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5\}$ دامنهٔ متغیر باشد ، ارزش گزارههای سوری زیر را تعیین کنید :

الف ـ $\nexists x \in A \ ، \ x + 3 = 10$

ب ـ $\forall x \in A \ ، \ x + 3 < 10$

ج ـ $\exists x \in A \ ، \ x + 3 < 5$

د ـ $\forall x \in A \ ، \ x + 3 < 7$

۹ـ هرگاه R نمایش مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، ارزش گزارههای سوری زیر را تعیین کنید :

الف ـ $\forall x \in R \ ، \ x^2 > 0$

ب ـ $\exists x \in R \ ، \ x^2 = x$

ج ـ $\exists x \in R \ ، \ \frac{x-1}{2} = 0$

د ـ $\nexists x \in R \ ، \ x^2 = -1$

نمایش گزارهها با حروف و جداول درستی آنها

بعضی اوقات در یك درس ممکن است لازم شود که گزارهای مثل

«عدد ۱۲۱۹۷۵ بر ۵ قابل قسمت است»

را چندین بار تکرار کنیم . درموقع برگشتِ به این گزاره ، تکرار تمام عبارت قدری طولانی است. برای سهولت ، این گزاره را بـا حرف p نمایش میدهیم وهرجا لازم باشد میگوییم گـزارهٔ p بهعبارت دیگر ، از حروف الفبای لاتین برای نمایش گزارهها استفاده می کنیم .

$q : \{2\} \subset \{2 ، 3\}$

$r : 2 < 3$

s : مهری بستنی دوست دارد .

گفتیم هر گزارهٔ مثل p یا درست یا نادرست است . این مطلب را به وسیلهٔ جدول زیر نشان می‌دهیم :

p
د
ن

جدول ارزشهای دو گزارهٔ p و q در زیر نمایش داده شده است .

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

نقیض یك گزاره

درحساب و جبر برای هرعدد a یك عدد a — وجود دارد که خوانده می‌شود « منهای a » .

درگزاره‌ها برای هر گزارهٔ p ، گزارهٔ p ~ وجود دارد که نقیض گزارهٔ p نام دارد وخوانده می‌شود «چنین نیست که p » .

مثال۱ – گزارهٔ $p:\ ۲\times ۳=۶$

درست است . نقیض این گزاره p ~ است که به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\sim p:\ \sim(۲\times ۳=۶)$$

یا

$$\sim p:\ ۲\times ۳\neq ۶$$

که یك گزارهٔ نادرست است .

مثال ۲– گزارهٔ $q:\ ۲\in\{۳ ، ۴ ، ۵\}$

نادرست است : نقیض این گزاره q~ است که به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\sim q:\ \sim(۲\in\{۳ ، ۴ ، ۵\})$$

یا $\sim q : \quad ۲ \notin \{۳ ، ۴ ، ۵\}$

که یک گزارهٔ درست است

تعریف ـ نقیض گزارهٔ p را با $\sim p$ نمایش داده ارزش آن را طبق جدول زیر تعریف می‌کنیم .

p	~p
د	ن
ن	د

یعنی ، اگر ارزش گزارهٔ p درست باشد نقیض آن نادرست است و اگر ارزش گزارهٔ p نادرست باشد نقیض آن درست خواهد بود .

مثال ۳ ـ ارزش نقیض گزارهٔ زیر را تعیین کنید :

$r : ۲ \nleqslant ۳$

حل : طبق آنچه در جبر و حساب خوانده‌اید ، گزارهٔ r نادرست است . لذا طبق جدول، نقیض آن یعنی $\sim r$ درست خواهد بود :

$\sim r : \sim(۲ \nleqslant ۳)$

یا $\sim r : ۲ \leqslant ۳$

مثال ۴ ـ نقیض گزارهٔ « دمرگان ریاضی‌دان است » ، را بنویسید :

حل : نقیض گزارهٔ فوق عبارت است از :

چنین نیست که « دمرگان ریاضی‌دان است »

یا « دمرگان ریاضی‌دان نیست»

گزاره‌های مرکب

یک گزاره وقتی معلوم است که ارزش آن معلوم باشد . با در دست داشتن ارزش گزاره‌های p ، q ، . . . ، و معرفی یک یا چند علامت قراردادی موسوم به رابطهای گزاره‌ها ، می‌توان گزاره‌های دیگری را تعریف کرد که ارزش آنها فقط به ارزش گزاره‌های p ، q ، . . . ، و علامات قراردادی بین آنها بستگی داشته باشد . چنین گزاره‌هایی مرکب نامیده شده آنها را با حروف P، Q ، . . . ، نمایش می‌دهند . در این فصل با چند گزارهٔ مرکب آشنا خواهید شد .

ترکیب عطفی

گزارهٔ : عدد ۲ زوج است «و» عدد ۲ اول است ، (۱)

از دوگزارهٔ سادهٔ «عدد ۲ زوج است» و «عدد ۲ اول است» تشکیل شده است .که بوسیلهٔ حرف ربط «و» بهم مربوط شده‌اند . گزارهٔ (۱) یك گزارهٔ مرکب است . هر کدام از گزاره‌های سادهٔ فوق‌الذکر ، یك مؤلفهٔ این گزارهٔ مرکب نامیده می‌شود . آیاگزارهٔ مرکب (۱) درست‌است ؟ هرگاه بین دوگزارهٔ ساده حرف‌ربط «و» قرار دهیم، برای آن که‌گزارهٔ مرکب حاصل درست باشد، آیا به نظر نمی‌رسدکه هر دو مؤلفه باید درست باشند ؟ آیاگزاره‌های مرکب زیردرست هستند ؟

عدد ۲ زوج است «و» عدد ۲ مضرب ۳ می‌باشد (۲)

عدد ۲ فرد است «و» عدد ۲ اول می‌باشد (۳)

عدد ۲ فرد است «و» عدد ۲ مضرب ۳ می‌باشد (۴)

گزاره‌های مرکب مثل‌گزاره‌های فوق را در حالت‌کلی بصورت :

$$p \wedge q$$

نمایش داده آن را ترکیب عطفی p و q می‌خوانند. ارزش ترکیب عطفی طبق جدول زیر است.

p	q	$p\wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

بعبارت دیگر ، ارزش ترکیب عطفی درست است هرگاه هر دو مؤلفهٔ آن درست باشند و در غیر این صورت ، ارزش آن نادرست است .

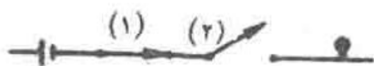
ارزش چهارگزارهٔ فوق‌الذکر را با کمك این جدول تعیین کنید .

جدول فوق را جدول درستی یا جدول ارزش گزارهٔ مرکب $p\wedge q$ می‌خوانند . رابط گزاره‌ای «$\wedge$» به معنای «و» زبان محاوره‌ای است .

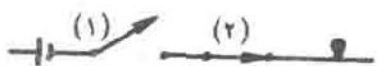
مثال ۱ ــ ارزش‌گزارهٔ زیررا از روی شکلهای داده شده تعیین کنید . هر کدام ازاین شکلها قسمتی ازیك مدار الکتریکی شامل دوکلید (۱) و (۲) است . هر کلید می‌تواند نمودار یك گزاره باشد . فرض می‌کنیم وقتی که کلید بسته باشد ، گزاره درست است (الکتریسیته جریان دارد) و وقتی که‌کلید بازباشد،گزاره نادرست است (الکتریسیته جریان ندارد) .



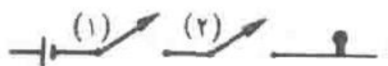
حل : ۱ــ در این شکل هردو کلید بسته است. لذا هردومؤلفهٔ گزارهٔ مرکب داده شده درست می‌باشند. درنتیجه، طبق سطر اول جدول ترکیب عطفی، گزارهٔ مرکب درست است. عملا نیز لامپ روشن خواهد بود.



۲ــ در این شکل کلید (۱) بسته و کلید(۲) باز است. لذا یکی از مؤلفه‌ها درست و دیگری نادرست می‌باشد. در نتیجه طبق سطر دوم جدول ترکیب عطفی، گزارهٔ مرکب داده شده نادرست می‌باشد. عملا نیز لامپ خاموش خواهد بود.



۳ــ دراین شکل، کلید (۱) باز و کلید (۲) بسته است. لذا یکی از مؤلفه‌ها نادرست و دیگری درست می‌باشد. در نتیجه، طبق سطر سوم جدول ترکیب عطفی، گزارهٔ مرکب داده شده نادرست می‌باشد. عملا نیز لامپ خاموش خواهد ماند.



۴ــ دراین شکل، کلیدهای (۱) و (۲) هر دو باز است. لذا هر دو مؤلفهٔ گزارهٔ مرکب داده شده نادرست است. در نتیجه طبق سطر چهارم جدول ترکیب عطفی گزارهٔ مرکب داده شده نادرست می‌باشد. عملا نیز لامپ خاموش است.

مثال ۲ ــ ارزش گزاره‌های مرکب زیررا تعیین کنید :

الف ــ زمین به‌دور خورشید می‌گردد و پاریس پایتخت فرانسه است.

ب ــ زمین به‌دور خورشید می‌گردد و پاریس پایتخت ایتالیاست.

ج ــ خورشید به‌دور زمین می‌گردد و پاریس پایتخت فرانسه است.

د ــ خورشید به‌دور زمین می‌گردد و پاریس پایتخت ایتالیاست.

حل : طبق معلومات عمومی که دارید، هر دو مؤلفهٔ گزارهٔ اول درست است. لذا گزارهٔ مرکب حاصل درست می‌باشد. گزاره‌های ب و ج، هر کدام یك مؤلفهٔ نادرست دارند، لذا نادرست می‌باشند. گزارهٔ آخر نیز که هر دو مؤلفه‌اش نادرست است نادرست می‌باشد.

مثال ۳ ــ ارزش گزاره‌های مرکب زیررا تعیین کنید :

الف ــ $(۲<۳)\wedge(۴\times۳=۱۲)$

ب ــ $(۵>۳)\wedge(۴+۳=۱۰)$

حل : طبق آنچه در جبر وحساب خوانده‌اید، هر دو مؤلفهٔ گزارهٔ اول درست است. لذا گزارهٔ مرکب حاصل درست می‌باشد. گزارهٔ (ب) یك مؤلفهٔ نادرست دارد،

لذا نادرست می‌باشد .

ترکیب فصلی

یکی از حروفی که در زبـان محاوره‌ای بعنوان رابط بین جملات ساده استعمال می‌شود «یا» می‌باشد که در ریاضیات باید آن را با دقت به‌کار برد . درزبان محاوره‌ای ازجملهٔ

« هوا برفی است یا خورشید درآسمان دیده می‌شود »

بیشتر منظورمان این است که یکی ازدو وضع واقع شده و هردو نیست . اما وقتی $ab=0$ ، در این صورت

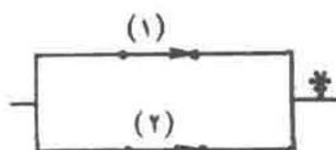
«$a=0$ یا $b=0$»

این «یا» ممکن است هر دو را نیز شامل باشد . امـا چون ریاضیات احتیاج به‌الفاظی‌دارد که معانی‌آنهاباید‌روشن باشد ، لذا اگر « یا » را در یك عبارت ریاضی به کار می بریم باید مفهوم آن را روشن سازیم . برای دفع هر نوع ابهام ، ریاضی‌دانها توافق کرده‌اند که گزارهٔ «p یا q » را که بصورت « $p\vee q$» نمایش داده می‌شود درست بگیرند هرگاه p یا q یا هر دو درست باشد . بـه‌عبارت دیگر ارزش $p\vee q$ را از روی ارزشهای p و q طبق جـدول زیر تعریف کرده‌اند :

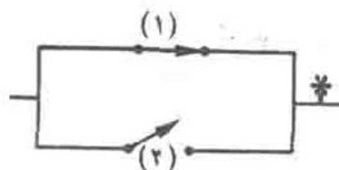
p	q	$p\vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

این جدول را جدول درستی ترکیب فصلی «یا» به کار برده شده‌دریای منطقی می‌خوانند . همچنین p و q را مؤلفه‌های $p\vee q$ می‌گویند .

مثال ۲ ــ ارزش گزارهٔ زیررا از روی شکلهای داده شده تعیین کنید (بهشرح مربوط بمثال ۱ از ترکیب عطفی رجوع شود) .



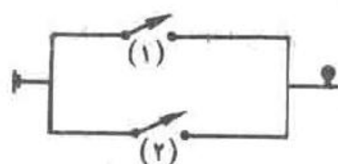
حل : ۱ــ دراین شکل ، هردو کلید بسته است . لذا ، هر دو مؤلفهٔ گزارهٔ مرکب داده شده درست می‌باشد، در نتیجه طبق سطر اول جدول ترکیب فصلی ، گزارهٔ مرکب داده شده درست است ولامپ نیز عملا روشن خواهد بود .



۲ـ در این شکل، کلید (۱) بسته و کلید (۲) باز است لذا، یکی از مؤلفه‌ها درست ودیگری نادرست می‌باشد. در نتیجه، طبق سطر دوم جدول ترکیب فصلی، گزارهٔ مرکب داده شده درست است ولامپ نیز عملا روشن خواهد بود.



۳ـ در این شکل، کلید (۱) باز و کلید (۲) بسته است. لذا، یکی از مؤلفه‌ها درست و دیگری نادرست می‌باشد. در نتیجه طبق سطر سوم جدول، گزارهٔ داده شده درست است و لامپ نیز روشن می‌باشد.



۴ـ در این شکل، کلیدهای (۱) و (۲) هر دو باز است. لذا هر دو مؤلفهٔ گزارهٔ مرکب نادرست می‌باشد، در نتیجه طبق سطر چهارم جدول ترکیب فصلی، گزارهٔ مرکب داده شده نادرست است و لامپ نیز خاموش می‌باشد.

مثال ۲ ـ ارزش گزاره‌های زیررا تعیین کنید:

الف ـ مارکونی مخترع رادیو است یا حکومت انگلستان مشروطهٔ سلطنتی است.

ب ـ مارکونی مخترع رادیو است یا حکومت انگلستان جمهوری است.

ج ـ مارکونی مخترع ماشین بخار است یا حکومت انگلستان مشروطهٔ سلطنتی است.

د ـ مارکونی مخترع ماشین بخار است یا حکومت انگلستان جمهوری است.

حل: طبق معلومات عمومی که دارید، هر دو مؤلفهٔ گزارهٔ اول درست است. لذا، گزارهٔ مرکب حاصل درست می‌باشد. گزاره‌های ب و ج هر کدام یك مؤلفهٔ درست دارند. در نتیجه طبق جدول گزارهٔ فصلی درست می‌باشند. بالاخره گزارهٔ آخری که هر دو مؤلفه‌اش نادرست است، نادرست می‌باشد.

مثال ۳ ـ ارزش گزاره‌های زیررا تعیین کنید:

الف ـ $(۲ \times ۳ = ۶) \vee$ (مجموعهٔ اعداد گویا $\in ۳$)

ب ـ (مجموعهٔ اعداد زوج $\in ۲$) $\vee$ (مجموعهٔ اعداد اول $\in ۲$)

ج ـ $(\frac{۰}{۷} \neq ۰) \vee (\frac{۵}{۵} = ۱)$

د ـ $(\frac{۱}{۲} \neq \frac{۲}{۴}) \vee (۳ \in \{۲ ، ۴\})$

حل: طبق آنچه درجبر وحساب خوانده‌اید و باتوجه به‌جدول‌ترکیب فصلی، سه گزارهٔ اول درست و گزارهٔ آخر نادرست است.

دو گزاره هم ارز

به جدول درستی دو گزارهٔ $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p)\wedge(\sim q)$ که در زیر نوشته شده است توجه کنید :

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$
د	د	د	ن
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	د

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p)\wedge(\sim q)$
د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

بطوری‌که می‌بینید ستون آخر دو جدول فوق یکسان‌اند. دو گزاره را که دارای این خاصیت باشند دو گزاره هم‌ارز می‌نامند و می‌نویسند :

$$\sim(p\vee q)\equiv(\sim p)\wedge(\sim q)$$

دو گزاره که ارزشهای جداول درستی آنها یکسان باشد دوگزارهٔ هم‌ارز نامیده می‌شوند . برای بیان هم‌ارزی دوگزاره ازنماد « $\equiv$ » استفاده می‌شود.

با استفاده ازجداول درستی به‌راحتی می‌توان خواص زیر را ثابت کرد.

خواص جابجایی، شرکت پذیری و پخشی $\vee$ و $\wedge$

خاصیت جابجایی : $p\wedge q\equiv q\wedge p$

$p\vee q\equiv q\vee p$

خاصیت شرکت‌پذیری : $p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r$

$p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$

خاصیت پخشی: $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

تمرین

۱ــ نقیض گزاره‌های زیررا بنویسید :

«عدد ۲۷۱ اول است» ؛ «$۷/۱ \times ۲/۸ = ۱۹/۱۲$» ؛ «$\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}<\frac{۳}{۵}$» ؛ «عدد ۱۰۰۱ بر ۱۳ بخش پذیر است» . «$۵=۲$» ؛ «$۲\neq۵$» ؛ «$۳\not<۵$» ؛ «$۲\in\{۲ و ۳ و ۴\}$» ؛ «کبلریکی ازمنجمین معروف است» .

۲ ــ هرگاه p نمایش گزارهٔ $۲\in\{۶ و ۵\}$ باشد، گزاره‌های زیر را با به کار بردن $\sim$ بنویسید :

الف ـ چنین نیست که p   ب ـ چنین نیست که «چنین نیست که p»

۳ـ ازگزاره‌های زیر کدام درست است:

الف ـ یك، عدد طبیعی است و دو قطر مستطیل مساوی هستند.

ب ـ یك، عدد اول است و دو قطر متوازی‌الاضلاع مساوی هستند.

ج ـ عدد ۲ زوج است یا عدد ۴ متعلق بمجموعهٔ اعداد حقیقی است.

د ـ عدد ۴ فرد است یا عدد ۴ متعلق بمجموعهٔ اعداد طبیعی است.

ﻫ ـ عدد ۴ فرد است یا ۴ مربع کامل نیست.

و ـ π عددگویاست و $\forall$ علامت سور وجودی است.

۴ـ ازگزاره‌های زیر کدام درست است:

الف ـ $(۷+۱=۸)\wedge(۱۸>۳)$

ب ـ $(۷+۱=۸۰)\wedge(۱۸<۳)$

ج ـ $(۱\in Z)\vee(۱\in N)$

۵ـ درگزاره‌های زیر به‌جای ؟ گزاره‌ای بنویسید که‌گزارهٔ مرکب حاصل درست باشد.

الف ـ عدد ۲ زوج است و ؟

ب ـ ؟ یا $۱<۲$

ج ـ $۲\in\{۱,۲\}$ و ؟

د ـ عدد ۷ اول است یا ؟

۶ـ اگر a برای نمایش‌گزارهٔ «ژرژکانتور مبتکر نظریهٔ مجموعه‌هاست» و b برای نشان دادن «ژرژ بول مبتکر جبرگزاره‌هاست» به‌کار رفته باشد، عبارات فارسی‌گزاره‌های زیر را نوشته در صورتی که دوگزارهٔ داده شده درست فرض شود، ارزش آنها را تعیین کنید.

الف ـ $a\wedge b$ ؛ ب ـ $a\vee b$ ؛ ج ـ $\sim a$ ؛ د ـ $\sim a\vee b$ ؛ ﻫ ـ $\sim a\wedge b$

۷ـ جدول درستی‌گزاره‌های زیررا تشکیل دهید.

$\sim q$ و $p\wedge\sim q$ و $\sim p\wedge q$ و $\sim p\wedge\sim q$ و $\sim q\vee q$

$(p\vee q)\wedge\sim p$ و $(p\wedge q)\vee(\sim p\vee\sim q)$

۸ـ هرگاه $p\wedge q$ درست باشد ارزشهای p و q را تعیین کنید.

۹ـ هرگاه $p\wedge q$ گزارهٔ درستی بوده و r یك گزارهٔ دلخواه باشد ارزش‌گزارهٔ $p\vee r$ چیست؟

۱۰ـ هرگاه $p\vee q$ درست و q نادرست باشد، ارزش p چیست؟

۱۱- آیاگزارهٔ مرکب $p\wedge\sim p$ درست است ؟

۱۲- ارزش گزارهٔ $p\vee\sim p$ را تعیین کنید.

۱۳- اگرگزارهٔ $p\wedge q$ درست باشد ارزش گزارهٔ $r\vee(p\wedge q)$ چیست ؟

۱۴- اگرگزارهٔ $p\wedge q$ نادرست و r درست باشد ارزش گزارهٔ $r\vee(p\wedge q)$ چیست ؟

۱۵- هرگاه p و q و r سه گزاره باشند بااستفاده از جدول درستی خواص زیر را ثابت کنید :

الف -

خاصیت جابجایی :

$$p\wedge q\equiv q\wedge p$$
$$p\vee q\equiv q\vee p$$

ب -

خاصیت شرکت پذیری :

$$p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r$$
$$p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$$

ج -

خاصیت پخشی :

$$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$$
$$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$$

د -

قوانین دمرگان :

$$\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p)\vee(\sim q)$$
$$\sim(p\vee q)\equiv(\sim p)\wedge(\sim q)$$

ترکیب شرطی

گزاره‌های شرطی در ریاضیات و در زندگی روزمره بـه طور فراوان بکار برده می‌شوند مثلاً گزاره‌های :

- اگر امروز شنبه باشد ، آنگاه فردا یکشنبه است .
- اگر فردا هوا مساعد باشد ، آنگاه فردا بیرون خواهیم رفت .
- اگر $n-1=0$ ، آنگاه $n=1$.
- اگریک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد ، آنگاه مثلث متساوی‌الساقین است .

همه شرطی هستند.

چیزی که در مثال‌های فوق مشترك می‌باشد این است که همهٔ گزاره‌ها به صورت :

اگر p ، آن‌گاه q

بیان شده‌اند . این نوع گزاره‌ها را درحالت کلی به‌صورت :

$$p\Rightarrow q$$

نمایش داده آنها را ترکیبهای شرطی می‌خوانند . ارزش ترکیب شرطی را ، از روی ارزشهای مؤلفه‌ها یعنی p و q طبق جدول زیر تعریف کرده‌اند :

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

p را مقدم و q را تالی این گـزاره می‌نامند . همان‌طور که از روی جـدول دیده می‌شود ، ترکیب شرطی فقط وقتی نادرست است که مقدم آن درست و تالیش نادرست باشد و درسایرحالات درست است .

مثال ۱ ـ ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید :

الف ـ $۲<۳ \Rightarrow ۴<۵$ ب ـ $۲<۳ \Rightarrow -۴<-۵$

ج ـ $۵<۲ \Rightarrow ۱ \in \{۱ ، ۲ ، ۳\}$ د ـ $۵<۲ \Rightarrow \{۳\} \subset \{۱ ، ۲\}$

حل : باتوجه به‌آنچه درجبروحساب خوانده‌اید وطبق جدول ترکیب شرطی، گزارهٔ «ب» نادرست و بقیه درست می‌باشند .

مثال ۲ ـ ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید :

الف ـ اگر ۴ عدد زوج باشد ، آن‌گاه ۴ بر ۲ بخش‌پذیر است .

ب ـ اگر مثلث سه ضلع دارد ، آن‌گاه مجموع گوشه‌های داخلی مثلث ۲۰۰° است .

ج ـ اگر ۲ فرد باشد ، آن‌گاه π یك عدد حقیقی است .

د ـ اگر ۲ فرد باشد ، آن‌گاه مستطیل دوقطر مساوی ندارد .

حل : گزارهٔ ب نادرست و بقیه درست می‌باشند . چرا ؟

تذکر ـ در زبان محاوره‌ای مقدم و تالی جملات شرطی کـه به‌نامهای شرط وجواب شرط معروف می‌باشند ، به‌طریقی با هم مربوط هستند . مثلا وقتی می‌گوییم :

اگر رضا ایرانی است ، آن‌گاه رضا حق شرکت در انتخابات را دارد .

دو جملهٔ « رضا ایرانی است » و « رضا حق شرکت در انتخابات را دارد » با هم مربوط می‌باشند . در حقیقت قسمت اول ، شرط قسمت دوم است . درصورتی که درگزاره‌های شرطی ، دو مؤلفه ممکن است هیچ نوع ارتباطی با هم نداشته باشند . مثلا :

۱ـ اگر سعدی اصفهانی است ، آن‌گاه رودخانهٔ سن در فرانسه است .

۲ـ اگر ۲ فرد باشد ، آن‌گاه حافظ شاعر انگلیسی است .

و این اشکالی در بحث گزاره‌ها ایجاد نمی‌کند ، چون آنچه درگزاره‌های شرطی مورد نظر است ارزش مؤلفه‌ها و در نتیجه ارزش ترکیب شرطی است .

صورتهای دیگر ترکیب شرطی

عبارات زیر برای خواندن گزارهٔ $p \Rightarrow q$ به‌کار برده شده است .

ـ اگر p ، آن‌گاه q

ـ p نتیجه می‌دهد q را

ـ q اگر p

ـ q شرط لازم برای p است .

ـ p شرط‌کافی برای q است

مثال ـ گزاره‌های زیر مفروضند :

«چهار ضلعی مستطیل است» : p

«دوقطرچهارضلعی مساوی است» : q

گزارهٔ شرطی تشکیل شده با مؤلفه‌های p و q فوق به‌صورت زیر است :

ـ اگر این چهارضلعی مستطیل باشد ، آن‌گاه دو قطرش مساوی است

صورتهای دیگر این گزاره را بنویسید .

حل :

ـ از مستطیل بودن چهار ضلعی نتیجه می‌شود که دو قطر چهار ضلعی مساوی است .

ـ دو قطر چهار ضلعی مساوی است ، اگر چهار ضلعی مستطیل باشد .

ـ تساوی دو قطر چهار ضلعی ، شرط لازم برای مستطیل بودن چهار ضلعی است .

ـ مستطیل بودن چهار ضلعی ، شرط‌کافی برای تساوی دو قطر چهار ضلعی است .

عکس ترکیب شرطی

هرگاه درگزارهٔ شرطی ، جای تالی و مقدم را عوض کنیم گزارهٔ جدیدی به‌دست می‌آید که به‌نام عکس گزارهٔ شرطی خوانده می‌شود . به عبارت دیگر ، گزارهٔ $q \Rightarrow p$ را عکس $p \Rightarrow q$ می‌خوانند .

ترکیب شرطی	$p \Rightarrow q$	(۱)
عکس ترکیب شرطی	$q \Rightarrow p$	(۲)

باید توجه داشت که $q \Rightarrow p$ ، یك گزارهٔ جدید بوده ، ارزش آن مستقل از ارزش $p \Rightarrow q$

می‌باشد . اگر (۱) درست باشد ممکن است (۲) درست یا نادرست باشد .

مثال ــ گزاره‌های شرطی زیر درست می‌باشند، تحقیق کنید عکس کدام یك از آنها درست است .

ــ اگر یك مثلث متساوی‌الساقین باشد، آن‌گاه دو زاویهٔ مجاور به دو ساقش با هم برابرند .

ــ اگر یك مثلث متساوی‌الاضلاع است ، آن‌گاه متساوی‌الساقین است .

ــ اگر یك چهارضلعی مستطیل باشد ، آن‌گاه دو قطرش مساوی است .

حل : عکس این گزاره‌ها به‌ترتیب عبارت است از :

ــ اگر دو زاویهٔ مجاور دو ساق یك مثلث با هم برابر باشند ، آن‌گاه آن مثلث متساوی‌الساقین است .

ــ اگر یك مثلث متساوی‌الساقین باشد ، آن‌گاه متساوی‌الاضلاع است .

ــ اگر دو قطر یك چهارضلعی مساوی باشد ، آن‌گاه آن چهارضلعی مستطیل است .

گزارهٔ اولی درست است و دومی و سومی نادرست می‌باشند . چرا ؟

ترکیب دو شرطی

ترکیب دو شرطی ، همان‌طور که اسم آن نشان می‌دهد ، از ترکیب دو گزارهٔ شرطی عکس یکدیگر به‌وجود آمده است. به مثالهای زیر توجه کنید .

مثال ۱ ــ گزارهٔ شرطی زیر را در نظر بگیرید .

اگر یك چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه اضلاع مقابلش متوازی است . عکس این گزارهٔ شرطی عبارت است از :

اگر اضلاع مقابل یك چهارضلعی متوازی باشد، آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است .

ترکیب این دو گزارهٔ شرطی به‌صورت زیر می‌باشد :

اگر یك چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع باشد ، آن‌گاه اضلاع مقابلش متوازی است و برعکس . (۱)

مثال ۲ ــ گزارهٔ شرطی زیر را درنظر بگیرید :

اگر دو صفحهٔ متمایز P و P' متوازی باشند ، آن‌گاه $P \cap P' = \varnothing$.

عکس این گزارهٔ شرطی عبارت است از :

اگر P و P' دو صفحه متمایز و $P \cap P' = \varnothing$ ، آن‌گاه دو صفحهٔ P و P' متوازی هستند . ترکیب این دو گزارهٔ شرطی به‌صورت زیر می‌باشد :

اگر دو صفحهٔ متمایز P و P' متوازی باشند ، آن‌گاه $P \cap P' = \varnothing$ و برعکس . (۲)

گزاره‌های (۱) و (۲) نمونه‌هایی از ترکیبهای دو شرطی می‌باشند.

همان‌طور که دیدید، ترکیب دو شرطی عبارت است از ترکیب عطفی گزارهٔ شرطی و عکس آن:

اگر p آن‌گاه q و اگر q آن‌گاه p

یا به‌طور مختصر: اگر p آن‌گاه q و برعکس

به‌عبارت دیگر، ترکیب دو شرطی p و q عبارت است از ترکیب عطفی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

یا به‌طور مختصر: $p \Leftrightarrow q$

که خوانده می‌شود «p اگر q و q اگر p» یا «p اگر q و برعکس»

جدول ارزش ترکیب دو شرطی برحسب ارزشهای p و q به‌صورت زیر است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

از روی جدول دیده می‌شود که گزارهٔ دوشرطی وقتی درست است که p و q هر دو درست یا هردو نادرست باشند. درزیر جدول فوق را که خلاصه شده است می‌بینید:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

مثال ۱ – ارزش گزاره‌های دوشرطی زیررا تعیین کنید.

الف – $۲<۳ \Leftrightarrow ۲+۵<۳+۵$

ب – $۲<۳ \Leftrightarrow -۲<-۳$

ج – $۲>۳ \Leftrightarrow ۹>۸$

د – $۲>۳ \Leftrightarrow -۲<-۳$

حل : با توجه به‌آنچه در حساب و جبر خوانده‌اید و طبق جدول فوق گزاره‌های الف و د که به ترتیب دارای دو مؤلفهٔ درست یا دومؤلفهٔ نادرست می‌باشند درست هستند و گزاره‌های ب وج که یك مؤلفهٔ نادرست دارند، نادرست می‌باشند.

مثال ۲ ــ ارزش گزاره‌های زیررا تعیین کنید :

الف ــ اگر $a \in \{b\}$ ، آن‌گاه $a=b$ و برعکس .

ب ــ اگر عدد ۳۱ اول باشد ، آن‌گاه عدد ۳۱ بردو قابل قسمت است وبرعکس .

ج ــ اگر ۴ فرد باشد ، آن‌گاه ۴ بر دو قابل قسمت است و برعکس .

د ــ اگر ۴ فرد باشد ، آن‌گاه ۴ مضرب ۳ است و برعکس .

حل : طبق آنچه در جبرو حساب خوانده‌اید ، با توجه به‌جدول ترکیب دو شرطی گزاره‌های الف و د درست و ب و ج نادرست می‌باشند .

شرط لازم و کافی

دیدید که ترکیب دو شرطی $p \Longleftrightarrow q$ به‌معنای :

$$p \Rightarrow q \qquad (۱) \qquad و \qquad q \Rightarrow p \qquad (۲)$$

می‌باشد . در ترکیب (۱) ، p شرط کافی برای q و در ترکیب (۲) ، p شرط لازم برای q است . لذا درمورد ترکیب دوشرطی می‌توان گفت :

p شرط کافی برای q و همچنین p شرط لازم برای q است .

یا به‌طور مختصر : p شرط لازم وکافی برای q است .

یا شرط لازم وکافی برای q آن است که p

لذا ،گزاره‌های دوشرطی را می‌توان به‌صورت شرط لازم وکافی بیان کرد .

مثال ۱ ــ گزاره‌های زیررا به‌صورتهای شرط لازم وکافی بیان کنید :

الف ــ اگر نقطه‌ای مانند M روی نیمساز یك‌زاویه باشد ، آن گاه M از دو ضلع آن زاویه به‌یك فاصله است و برعکس .

ب ــ اگر نقطه‌ای مانند M روی عمودمنصف یك پاره‌خط باشد ، آن‌گاه M از دو سر آن پاره‌خط به‌یك فاصله است وبرعکس .

ج ــ اگر یك مثلث متساوی‌الساقین باشد ، آن‌گاه دو زاویهٔ مقابل به‌دوساق آن مساوی است و برعکس .

حل :

الف ــ شرط لازم وکافی برای آن‌که نقطهٔ M از دو ضلع یك زاویه به‌یك فاصله باشد ،آن

است که M روی نیمساز آن زاویه باشد .

ب ـ شرط لازم وکافی برای آن که نقطهٔ M از دو سر یك پاره‌خط به‌یك فاصله باشد ، آن است که M روی عمودمنصف آن پاره‌خط باشد .

ج ـ شرط لازم وکافی برای آن‌که دو زاویهٔ مقابل به‌دوساق یك مثلث مساوی باشد آن است که آن مثلث متساوی‌الساقین باشد .

مثال ۴ ـ شرط لازم وکافی برای آن‌که مجموع دوعدد فرد باشد ، آن‌است که یکی‌ازآنها فرد و دیگری زوج باشد . این ترکیب دو شرطی را به‌صورت دوگزاره بیان‌کنید .

حل : الف ـ اگریکی‌ازدوعدد مفروض فرد و دیگری زوج باشد، آن‌گاه مجموع این‌دوعدد فرد است .

ب ـ اگرمجموع دوعدد فرد باشد ،آن‌گاه یکی ازاین دوعدد فرد ودیگری زوج است .

اگر و تنها اگر

گزاره‌های دو شرطی که دربالا به‌صورت شرط لازم وکافی بیان شده‌اند با

اگر و تنها اگر

نیز قابل بیان می‌باشند .

نقطهٔ M روی نیمساز زاویه است اگر و تنها اگر M از دو ضلع این زاویه به‌یك فاصله باشد .

نقطهٔ M روی عمود منصف پاره‌خط است اگر و تنها اگر M از دو سر این پاره‌خط به یك فاصله باشد .

یك مثلث متساوی‌الساقین است اگرو تنها اگر دو زاویهٔ مقابل به دوساق مساوی داشته باشد.

تذکر ـ درتعاریف ریاضی‌اغلب‌ازگزاره‌های دوشرطی استفاده می‌شود . در زیرچندتعریف آمده است :

ـ دو خط متقاطعند ، اگر و تنها اگر یك نقطهٔ تلاقی داشته باشند .

ـ مثلث متساوی‌الساقین است اگر و تنها اگر دوساق مساوی داشته باشد .

صورتهای مختلف ترکیب دو شرطی

همان‌طور که دیدید ، ترکیب دوشرطی $p \Longleftrightarrow q$ به‌صورتهای زیرخوانده می‌شود :

ـ اگر p ، آن‌گاه q و برعکس

ـ p شرط لازم وکافی برای q است.

ـ q شرط لازم وکافی برای p است .

ـ p اگر و تنها اگر q

عکس نقیض ترکیب شرطی

بنابر تعریف، عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Longrightarrow q$ ، عبارت است از :

$$\sim q \Longrightarrow \sim p$$

ارزش جدول این ترکیب شرطی جدید که خوانده می‌شود «اگر نیست q ، آن‌گاه نیست p » با ارزش جدول شرطی $p \Longrightarrow q$ یکی می‌باشد.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Longrightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د

p	q	$p \Longrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

بدین ترتیب :

$$(p \Longrightarrow q) \equiv (\sim q \Longrightarrow \sim p)$$

یعنی دو گزارهٔ شرطی و عکس نقیض آن هم‌ارز بوده و مـی‌توان از یکی به جای دیگری استفاده کرد.

تذکر ـ قواعد وقوانین جبرگزاره‌ها مبانی اولیهٔ استدلال است . این قواعد وقوانین برای استدلال درکلیهٔ شاخه‌هـای ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرند . به چند مثال ساده زیر توجه کنید :

مثال ۱ـ اگر a ، b و c سه‌عدد حقیقی باشند ،

$$(a<b \text{ و } b<c) \Longrightarrow a<c$$

در اینجا اگر گزاره‌های P و Q به‌ترتیب بصورت زیر درنظر گرفته شوند :

$P: a<b \quad (۱)$ و $b<c \quad (۲)$

$Q: a<c$

اکنون بایستی درستی گزاره شرطی بصورت « $P \Longrightarrow Q$ » را نشان دهیم .

چون P مفروض است ، لذا بنابر (۱) a کوچکتراست از b ، پس در (۲) مـی‌توان بجای b مقدار کوچکترآن یعنی مقدار a را قرار داد نتیجه می‌شود $a<c$.

این مثال نمونه‌ایست ازقضایای ریاضی ، که یك گزاره شرطی درست می‌باشند .

مثال ۲- اگر مربع عددی زوج باشد ، آنگاه آن عدد زوج است .

فرض کنید a آن عدد بوده و P و Q به ترتیب گزاره‌های زیر باشند :

$$P:\ a^2 = 2k \quad و \quad k \in Z$$

$$Q:\ a = 2k' \quad و \quad k' \in Z$$

اکنون می‌خواهیم درستی گزارهٔ « $P \Rightarrow Q$ » را نشان دهیم ، ولی چون عکس‌نقیض یك گزاره شرطی باآن گزاره شرطـی هم‌ارز است پس کافیست درستی « $\sim Q \Rightarrow \sim P$ » را نشان دهیم .

$$\sim Q:\ a = 2m' + 1 \quad و \quad m' \in Z$$

$$\sim P:\ a^2 = 2m + 1 \quad و \quad m \in Z$$

بدین ترتیب :

$$\sim Q:\ a = 2m' + 1 \Rightarrow a^2 = 4m'^2 + 4m' + 1 = 2(2m'^2 + 2m') + 1$$

بافرض $m = 2m'^2 + 2m'$ داریم $a^2 = 2m + 1$ که درنتیجه درستی گزاره « $\sim Q \Rightarrow \sim P$ » بدست آمده است .

استفاده ازعکس نقیض یك گزاره شرطـی برای اثبات آن گزاره شرطـی در ریاضیات معمول است .

مثال ۳- گزاره زیر درست است یا نادرست ؟

« هیچ عدد زوجی اول نیست »

چون عدد ۲ هم زوج است و هم اول لذا گزاره فوق نادرست است .

دراینجا برای اثبات نادرستی یك گزاره فقط از نادرستی این گزاره در یك حالت خاص استفاده کردیم ، چون اگر مطلبی دریك حالت خاص نادرست باشد آنگاه کلی بودن این مطلب نادرست خواهد بود . این روش به اثبات بوسیله مثال نقض موسوم است .

تمرین

۱ - ارزش گزاره‌های زیررا تعیین کنید .

الف - $(2^7 = 126) \Rightarrow (2^8 = 252)$

ب - $2 < 5 \Rightarrow 5 > 2$

ج - اگر Z مجموعهٔ اعداد صحیح باشد $\forall x \in Z ،\ 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

د - $5 \in \{2 ، 3\} \Rightarrow \{5\} \subset \{2 ، 3\}$

۲ - ارزش گزاره‌های زیررا تعیین کنید .

الف ـ اگر ۱۲ مقسوم‌علیه ۶۴ نباشد ، آن‌گاه ۴ مقسوم علیه ۶۴ نیست .

ب ـ اگر یك مثلث چهارضلع داشته باشد ، آن‌گاه متوازی‌الاضلاع سه ضلع دارد .

ج ـ اگر ۱۲ زوج باشد ، آن‌گاه $۲\in\{۳ ، ۵\}$

د ـ اگر ۳۱ عدد اول باشد ، آن‌گاه ۱۱ مقسوم‌علیه ۴۰ است .

هـ ـ اگر تهران پایتخت ژاپن باشد ، آن‌گاه سعدی ریاضی‌دان است .

۳ ـ گزاره‌های زیررا با استفاده از حروف و رابطهای گزاره‌ای نشان دهید :

الف ـ اگر من دانشجو باشم و در کوی دانشگاه زندگی کنم ، آن‌گاه حق استفاده از رستوران کوی دانشگاه را دارم .

ب ـ اگر دو خط موازی باشند و خطی یکی از آنها را قطع کند ، آن گاه دیگری را نیز قطع خواهد کرد .

ج ـ اگر $a<b$ و $c>0$ آن‌گاه ، $ac<bc$ (a ، b و c اعداد حقیقی هستند) .

د ـ اگر عدد a اول و بزرگتر از ۳ باشد ، آن‌گاه a زوج نیست .

۴ ـ صورتهای دیگر گزاره‌های شرطی زیررا بنویسید :

الف ـ اگر یك چهارضلعی لوزی باشد، آن‌گاه اقطارش برهم عمود هستند .

ب ـ اگر دو مثلث متشابه باشند ، آن‌گاه زاویه‌های متناظر آنها مساوی است .

۵ ـ اگر گزارهٔ «a عدد زوج است » را به p و گزارهٔ « a بر دو بخش پذیر است » را به q نمایش دهیم ، عبارات فارسی گزاره‌های زیررا بنویسید .

$$p\vee q\Rightarrow q \text{ ؛ } q\Rightarrow p \text{ ؛ } \sim p\Rightarrow\sim q \text{ ؛ } \sim q\Rightarrow\sim p \text{ ؛ } \sim q\Rightarrow p$$

۶ـ جداول ارزش گزاره‌های زیررا تشکیل دهید :

$$\sim p\Rightarrow q \text{ ؛ } p\Rightarrow\sim q \text{ ؛ } \sim p\Rightarrow\sim q \text{ ؛ } (p\wedge q)\Rightarrow p \text{ ؛ } (p\vee q)\Rightarrow q$$

$$(p\vee q)\Rightarrow p \text{ ؛ } \sim p\Rightarrow(p\vee q) \text{ ؛ } (p\vee q)\Rightarrow\sim(p\wedge q)$$

۷ـ اگر $p\Rightarrow q$ و p درست باشند ، ارزش q چیست ؟

۸ـ اگر $p\Rightarrow q$ و $\sim q$ درست باشند ، ارزش $\sim p$ چیست ؟

۹ـ ارزش گزاره‌های زیررا تعیین کنید :

الف ـ $۵<۴\Leftrightarrow ۳+۵<۴+۵$

ب ـ α قائمه است $\Leftrightarrow \angle\alpha=۹۰^\circ$

ج ـ (a ، b و c اعداد حقیقی هستند) . $a<b\Leftrightarrow a+c<b+c$

۱۰ـ ارزش گزاره‌های زیررا تعیین کنید .

الف ـ اگر $\frac{۵}{۰}$ یك عدد حقیقی باشد ، آن‌گاه $۰=۰\times۵$ است و برعکس.

ب ــ شرط لازم و کافی برای آن که یك خط درصفحه باشد ، آن است که دو نقطهٔ آن در صفحه باشد .

ج ــ اگر دو خط موازی یا متقاطع باشند ، آن‌گاه بــر این دو خط یك صفحه مــی‌گذرد و برعکس .

د ــ یك مثلث متساوی‌الساقین است اگروفقط اگر نیمساز زاویهٔ رأس وارتفاع نظیر آن رأس برهم منطبق باشند .

۱۱ــ جداول ارزش گزاره‌های زیر را تشکیل دهید :

$$\sim p \Leftrightarrow q \;؛\; \sim p \Leftrightarrow \sim q \;؛\; (p \wedge q) \Leftrightarrow p \;؛\; (p \vee q) \Leftrightarrow q$$

ژرژکانتور[1] (۱۹۱۸ - ۱۸۴۵)


ژرژ کانتور

ژرژ ، لوئی فیلیپ‌کانتور فرزند ژرژ ولادیمیر وماری‌بوهم بوده است . پدرش در کپنهاگ (پایتخت دانمارك) متولد شد و در جوانی به شهر پطرزبورگ در روسیه رفت و در آنجا اقامت گزید . ریاضی‌دان نامی درهمین شهر درسوم مارس۱۸۴۵ متولدگردید. علتی ربوی باعث‌گردیدکه پدرش روسیه را ترك کند و در سال ۱۸۵۶ در شهر فرانکفورت در آلمان اقامت‌گزیند . تحصیلات ابتدایی کانتور در شهر سن پطرزبورگ و فرانکفورت انجام گرفت. درسن ۱۵ سالگی تحصیلات متوسطه را در شهر ویس‌بادن شروع نمود . تحصیلات عـالی را در دانشگاه زوریخ آغاز و در برلین در رشته‌های فلسفه ، فیزیك و ریاضی ادامه داد . استادان او در دانشگاه برلین عبارت بودند از کومر ، وایرشتراس و کرونکر که بعدها دشمن او شد .

سال ۱۸۷۴ ، سال انتشاراولین اثر انقلابی‌کانتور یعنی تئوری مجموعه‌هاست . درعین حال سال ازدواج او نیز می‌باشد . او در سن ۲۹ سالگی با والی‌گوتمان ازدواج‌کرد و صاحب دوپسر و چهار دختر شدکه هیچ‌کدام استعداد پدر را نداشتند .

جالب‌ترین و خیره کننده‌ترین نتایج تئوری کانتور در مورد مجموعه‌های شمارش‌ناپذیر او به دست‌آمده است‌که روشن ترین و ساده‌ترین مثال آن عبارت است از مجموعهٔ نقاط واقع بریك قطعه خط .

تئوری‌کانتور در بارهٔ بی‌نهایت واقعی و در بارهٔ حساب اعداد مافوق بی‌نهایت (ترانسفینی) شامل بسیاری مسائل اساسی دیگر است‌که بیان همهٔ آنها در این صفحه امکان پذیر نیست .

از ابتدای قرن بیستم به تدریج در همه جا اثر کانتور یعنی تئوری مجموعه‌ها به عنوان یکی از اساسی‌ترین پیشرفتها در تمام شاخه‌های ریاضی و خاصه در اساس آنالیز پذیرفته شد .

امروز ، تئوری انقلابی‌کانتور تبدیل به یك‌تئوری کلاسیك شده‌است که‌بدون اطلاع ازآن‌لااقل فهم نیمی از مطالب ریاضیات امکان‌پذیر نیست .

کانتور روزششم ژانویهٔ ۱۹۱۸ درشهر هال و درهنگامی‌که نبوغ اوبرجهانیان آشکار می‌شد در سن ۷۳ سالگی بدرود جهان گفت .

1- George Cantor

قسمت دوم — نظریهٔ مجموعه‌ها

فصل ۱

مجموعه‌ها

مفهوم مجموعه

«مجموعه» یکی از مفاهیم ریاضی (مانند مفاهیم نقطه و خط در هندسه) می‌باشد که تعریف نشده است. منظور از یك «مجموعه» دسته‌ای است از اشیائی که کاملا مشخص شده باشند. بعنوان مثال « دانش‌آموزان دبیرستان‌های شهرستان کرج درسال تحصیلی جاری » ، « خیام ، خوارزمی و غیاث‌الدین جمشید کاشانی » ، « عددهای ۴ ، ۵ و ۳ — » و « شهرهای کازرون ، بوشهر و نطنز» هر کدام یك مجموعه می‌باشند وحال‌آن‌که مثلا « دانش‌آموزان خوب دبیرستانهای ایران درسال تحصیلی جاری » یك مجموعه نیست زیرا صفت «خوب» تعریف نشده است .

به‌بیان دیگر می‌توان گفت‌که یك مجموعه دسته‌ای از اشیای‌کاملا مشخص می‌باشد که هر شیء مفروض نسبت به‌این مجموعه یکی از دو وضع متمایز زیر را دارا است :

۱ـ آن شیء متعلق به مجموعه باشد .

۲ـ آن شیء متعلق به مجموعه نباشد .

اشیایی که مجموعه را تشکیل می‌دهند به‌نام عضوهای(عنصرهای) مجموعه خوانده می‌شوند.
مثالهای زیر مفهوم مجموعه را روشن تر می‌سازند :

۱ـ مجموعهٔ اعداد : ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸

۲ـ مجموعهٔ روزهای هفته

۳ـ مجموعهٔ شهرهای : کازرون ، بوشهر ، نطنز

۴ـ مجموعهٔ حروف صدادار الفبای انگلیسی

۵ـ مجموعهٔ عددهای : π ، $\sqrt{2}$ ، $-\frac{1}{2}$

۶ـ مجموعهٔ رنگهای پرچم ایران

۷ـ مجموعهٔ رودهای :کارون ، ارس ، زاینده رود

۸ـ مجموعهٔ شهرستانهای ایران‌که به «ن» ختم می‌شوند

۹ـ مجموعهٔ نامهای : سعدی ، قلم ، اتوبوس

۱۰ـ مجموعهٔ اعداد فرد

در مثالهای فوق ، مجموعه‌های با شمارهٔ فرد به طریق نوشتن عضوها یا نام بردن عضوها و مجموعه‌های با شمارهٔ زوج با بیان خاصیتی معین مشخص شده‌اند .

دیده می‌شود که هیچ نوع محدودیتی درنوع عضوهای یك مجموعه وجود ندارد . عضوهای یك مجموعه می‌توانند اعداد ، *نقاط* ، خطوط ، حروف *الفبا* ، *اشخاص* ، شهرها ، . . . ، باشند .

باید توجه داشت که هر جمله که یك دسته از اشیا را معین می‌کند یك مجموعه را مشخص نمی‌سازد. مثلا:

« سه نفر از شعرای معروف ایران »

یك مجموعه نیست . زیرا ، مولوی یکی از شعرای معروف ایران است ، ولی آیا مولوی به این گروه سه نفری تعلق دارد یا نه مشخص نیست. همچنین:

« سه تابلو از نقاشیهای زیبای جهان »

یك مجموعه نیست . زیرا سلیقهٔ افراد در انتخاب سه تابلوی زیبای دنیا با هم فرق دارد . پس

هر گروهی از اشیاکه مشخص نباشد ، مجموعه نیست

در نتیجه وقتی برای یك دسته از اشیا کلمهٔ مجموعه به‌کار برده می‌شود مسلماً این دسته از اشیا باید مشخص باشند ، زیرا :

هر مجموعه با عضوهای خود مشخص می‌شود

نمایش مجموعه

مجموعــه را معمولا با حروف بزرگ الفبــای لاتین ، A ، B ، C ، X ، Y ، . . . نشان می‌دهند . همچنین مجموعهٔ A با عضوهای a ، b و c را به صورت زیر می‌نویسند :

$$A = \{ a , b , c \}$$

در مواردی که عدهٔ عضوهای مجموعه زیاد و نوشتن تمام عضوها مشکل بوده یا امکان‌پذیر نباشد ، مثل مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ ، در این صورت بعداز نوشتن چند عضو سه نقطه‌گذاشته ، آن‌گاه عضو آخر را می‌نویسند :

$$B = \{ ۱ , ۲ , ۳ , . . . , ۹۹۹ \}$$

یا همان‌طور که دردورهٔ *راهنمایی* خوانده‌اید مجموعهٔ اعداد طبیعی را به‌صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$N = \{ ۱ , ۲ , ۳ , . . . \}$$

یعنی بعداز نوشتن چند عضو سه نقطه قرار می‌دهند که مفهوم آن نامتناهی بــودن عدهٔ عضوهای مجموعه است .

مجموعهٔ :

$$A = \{ a , b , c \}$$

را به صورت زیر نیز نمایش می‌دهند :

$A = \{ x \mid$ یکی از حروف اول تا سوم الفبای لاتین است $x \}$

و می‌خوانند «A مجموعه‌ای است با عضوهای x به‌قسمی که x یکی از حروف اول تا سوم الفبای لاتین است».

بهمین ترتیب مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ (مجموعهٔ B بالا) را چنین می‌نویسند :

$B = \{ x \mid$ عدد طبیعی کوچکتر از هزار است $x \}$

و می‌خوانند «B مجموعه‌ای است با عضوهای x به قسمی که x عدد طبیعی کوچکتر از هزار است».

بالاخره مجموعهٔ اعداد طبیعی را به شکل زیر نشان می‌دهند :

$N = \{ x \mid$ عدد طبیعی است $x \}$

و می‌خوانند «N مجموعه‌ای است با عضوهای x به قسمی که x عدد طبیعی است».

این طرز معرفی مجموعه را نمایش مجموعه با علائم ریاضی می‌خوانند

حرف x که برای نمایش عضو دلخواه مجموعه به‌کار می‌رود به نام متغیر خوانده می‌شود .

متغیر حرف یا علامتی است که می‌تواند جانشین هر عضو مجموعه شود . متغیر را با y و z نیز نشان می‌دهند . به طور کلی در نمایش مجموعهٔ دلخواه A با علائم ریاضی می‌نویسیم :

$A = \{ x \mid$ دارای خاصیت مشخصی است $x \}$

مثال - مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی نشان دهید :

$A = \{ ۱۱ ، ۱۳ ، ۱۷ ، ۱۹ \}$

$B = \{$ خرداد ، اردیبهشت ، فروردین $\}$

$C = \{ ۳ ، ۶ ، ۹ ، ... \}$

$D = \{ a ، e ، i ، o ، u \}$

حل :

$A = \{ x \mid ۱۰ < x < ۲۰$ و عدد اول است $x \}$

$B = \{ x \mid$ ماه فصل بهار است $x \}$

$C = \{ x \mid$ عدد طبیعی و مضرب ۳ است $x \}$

$D = \{ x \mid$ حرف صدادار انگلیسی است $x \}$

مجموعه‌های فوق را بخوانید .

تعلق و عضویت

در صفحات قبل، اشیایی که مجموعه را تشکیل می‌دهند عضوهای مجموعه نامیده شد . درمجموعهٔ :

$A = \{ ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ \}$

اعداد ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ را عضوهای A و هر کدام ازاین اعداد را یك عضو این مجموعه می‌گوییم .

برای بیان عضویت عدد ۲ در مجموعهٔ A می‌نویسیم :

$$۲ \in \{ ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ \} \quad \text{یا} \quad ۲ \in A$$

و می‌خوانیم « ۲ متعلق به A است » یا « ۲ عضو A است » یا « ۲ در A است »

بهمین ترتیب برای سایر عضوهای A می‌نویسیم:

$$۴ \in A ، ۶ \in A ، ۸ \in A$$

در مجموعهٔ A ، عدد ۵ عضو مجموعه نیست . برای بیان این مطلب می‌نویسیم :

$$۵ \notin \{ ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ \} \quad \text{یا} \quad ۵ \notin A$$

می‌خوانیم « ۵ متعلق به A نیست » یا « ۵ عضو A نیست » یا « ۵ در A نیست ».

تمرین

۱ـ کدام یك از توصیفهای زیر، مجموعهٔ $A = \{ ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ \}$ را مشخص می‌سازد؟

الف ـ چهار عدد زوج متوالی

ب ـ اعداد زوج کوچکتر از ۱۰

ج ـ اعداد طبیعی زوج بین یك و ۹

د ـ چهار مضرب متوالی ۲

۲ـ کدام یك ازتوصیفهای زیر ، یك مجموعه را مشخص می‌سازد ؟

الف ـ اعداد طبیعی کوچکتر از صد

ب ـ مردان شیك‌پوش جهان

ج ـ شعرای معروف جهان

د ـ مردم خوشبخت روی زمین

هـ ـ اعداد طبیعی زوج

و ـ دانش‌آموزان ایران درسال جاری

۳ـ مجموعه‌های زیر را که با بیان « خاصیتی معین » مشخص شده‌اند ، یك‌بار با نوشتن عضوها و یك بار با علائم ریاضی نشان دهید :

الف ـ مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد بین یك و ۱۲ (غیر از یك و ۱۲)

ب ـ مجموعهٔ اعداد طبیعی بین یك و ۵۰ که مربع کامل هستند (غیر از یك و ۵۰)

ج ـ مجموعهٔ ماههای پاییز

د ـ مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷

هـ ـ مجموعهٔ اقیانوسهای کرهٔ زمین

و ـ مجموعهٔ قاره‌های خشکی زمین

ز ـ مجموعهٔ کشورهای همسایهٔ ایران

۴ـ مجموعه‌های زیر راکه با نوشتن عضوها مشخص شده‌اند با علائم ریاضی بنویسید :

$A=\{ a ، b ، c ، d \}$

B={ بهار ، تابستان ، پائیز ، زمستان }

$C=\{ ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ، ۱۰ ، ۱۲ ، ۱۴ \}$

$D=\{ ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۱۱ ، \cdots \}$

$E=\{ ۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۹ ، \cdots \}$

۵ـ مجموعه‌های زیر با علائم ریاضی مشخص شده‌اند. آنها را «با نوشتن عضوها» نشان دهید :

$A=\{ x \mid x\in N ، ۲x-۱۰=۰ \}$

$B=\{ x \mid x\in N ، x<۵ \}$

C={ x | x نام یکی از روزهای هفته است }

$D=\{ x \mid x\in N ، x>۸ \}$

۶ـ مجموعه‌های $A=\{ ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ \}$ و $B=\{ ۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ \}$ و $C=\{ a ، b ، c \}$ داده شده‌اند. از گزاره‌های زیر کدام درست است ؟

$۲\in A ، ۴\in B ، ۵\notin B ، a\in A ، b\in C ، ۳\in A ، ۳\in B$

$۷\notin A ، b\in B ، d\in C ، c\in A ، ۱\notin B ، ۴\in A ، a\in C$

مجموعهٔ تهی

در دورهٔ راهنمایی خوانده‌اید که در اروپا حتی تا قرن ۱۶ میلادی برای شمارش و عدد- نویسی از ارقام رومی :

I ، V ، X ، L ، C ، D ، M

۱ ، ۵ ، ۱۰ ، ۵۰ ، ۱۰۰ ، ۵۰۰ ، ۱۰۰۰

استفاده می‌شد . همچنین حروف ابجد :

ا ، ب ، ج ، د ، ه ، و ، ز ، ح ، . . .

۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، . . .

در کشورهای عربی‌زبان برای عددنویسی به‌کار می‌رفت . چنان که ملاحظه می‌شود در هر دو مورد عدد صفر وجود نداشته‌است. صفر به معنای تهی یا خالی‌است که ابداع آن موجب آسانی کار عدد- نویسی گردید .

ضمن مطالعه در مجموعه‌ها نیز متوجه شدند که وجود مجموعهٔ تهی موجب آسانی وعمومیت دادن دستورهای مجموعه‌ها خواهد شد . لذا ، مجموعهٔ تهی را معرفی و آن را به صورت زیر تعریف کرده‌اند :

مجموعهٔ تهی یعنی مجموعه‌ای که عضو نداشته باشد .

مجموعهٔ تهی را با علامات :

$$\{\ \} \text{ یا } \varnothing$$

نمایش می‌دهند. این مجموعه را نباید با مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ یا $\{0\}$ که هر کدام دارای یك عضو است اشتباه کرد. برای روشن شدن مطلب، در زیر چند مثال از مجموعهٔ تهی ذکر شده است:

۱ــ مجموعهٔ اعداد طبیعی بین ۹ و ۱۰

۲ــ مجموعهٔ اعداد اول بین ۲۴ و ۲۸

۳ــ مجموعهٔ انسانهایی که در کرهٔ خورشید زندگی می کنند

۴ــ مجموعهٔ اعداد زوج اول بزرگتر از ۳

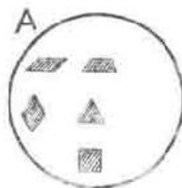
۵ــ مجموعهٔ مثلثهای صفحه که مجموع گوشه‌های داخلی آنها °۲۰۰ باشد

نمایش هندسی مجموعه

در دورهٔ راهنمایی مجموعهٔ :

$$A = \{ ▰ ، ▲ ، ◆ ، ▲ ، ■ \}$$

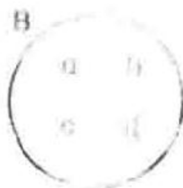
به صورت :



و مجموعهٔ :

$$B = \{a ، b ، c ، d\}$$

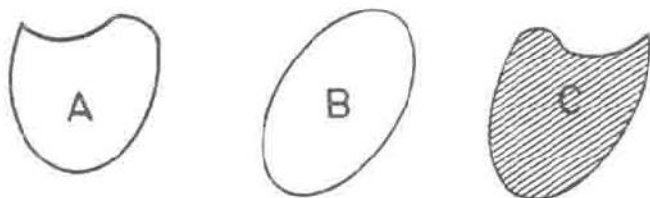
به صورت :



نشان داده شده است . این طریق نشان دادن مجموعه به‌نام :

نمایش هندسی یا نمایش مجموعه با نمودار وِن[1]

خوانده می‌شود . این روش اولین بار به وسیلهٔ «وِن» ریاضی‌دان معروف انگلیسی به‌کار برده شد ، ون در حالت‌کلی مجموعه را با قسمتی از نقاط صفحهٔ محدود به یك دایره ، یك مستطیل یا هر منحنی بستهٔ دیگری نمایش داد و هر نقطهٔ داخل شکل را یك عضو مجموعه فرض نمود گاهی ناحیهٔ داخلی شکلی راکه برای نمایش مجموعه به‌کار می‌رود هاشور می‌زنند .در زیر مجموعه‌های A و B و C با استفاده از این روش نشان داده شده‌اند :



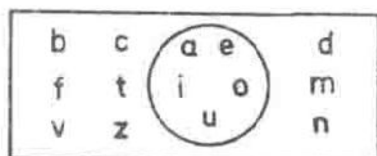
زیرمجموعه‌های یك مجموعه

هر یك از دانش‌آموزان دبیرستانهای تهران یکی از دانش‌آموزان دبیرستانهای ایران نیز می‌باشد.

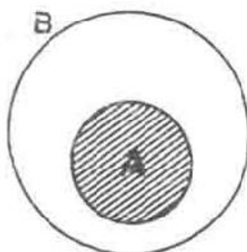
مجموعه دانش‌آموزان ایران



هرحرف صدادار انگلیسی یکی ازحروف الفبای انگلیسی نیز هست.



اگر B نمایش مجموعهٔ ۳۲ مهرهٔ شطرنج و A نمایش مجموعهٔ ۱۶ مهرهٔ پیادهٔ آن باشد ، روشن است که هریك از عضوهای مجموعهٔ A یکی از عضوهای مجموعهٔ B نیز می‌باشد.

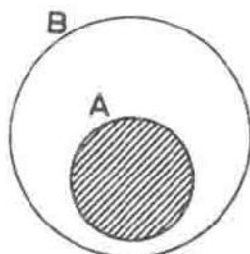


۱ــ نمودار «اولر ــ وِن» نیز خوانده می‌شود .

تعریف ــ مجموعهٔ A را زیرمجموعهٔ B نامند هرگاه هر عضو A ، عضو B نیز باشد .

به عبارت دیگر :

مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ B است هرگاه برای هر $x \in A$ نتیجه شودکه $x \in B$.



اگر A زیر مجموعهٔ B باشد می‌نویسیم :

$$A \subset B$$

و نمایش هندسی آن بصورت شکل مقابل می‌باشد .

و تعریف آن با زبان ریاضی بصورت زیر است :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

مثالهای زیر مفهوم زیر مجموعه را روشن‌تر می‌سازند:

$\{e، i، u\} \subset \{a، e، i، o، u\}$

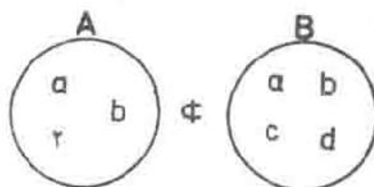
$\{۳، ۲، ۵\} \subset \{۱، ۲، ۳، ۴، ۵\}$

{ ▨ ، ▲ } ⊂ { ▨ ، ▲ ، ◆ ، ● }

اگر A زیرمجموعهٔ B نباشد می‌نویسند :

$$A \not\subset B$$

و این به مفهوم آن است‌که :



لااقل یك عضو در A وجود داردکه در B نیست .

و با زبان ریاضی :

$$(A \not\subset B) \Leftrightarrow (\exists x \text{ و } x \in A \wedge x \notin B)$$

از تعاریف فوق نتیجه می‌شودکه :

۱ــ هر مجموعه زیرمجموعهٔ خودش است .

یعنی ، اگر A مجموعهٔ دلخواهی باشد داریم :

$$A \subset A$$

زیرا ، اگر A زیرمجموعهٔ A نباشد ، یعنی ،

$$A \not\subset A$$

در این صورت ، در A باید عضوی وجود داشته باشدکه در A نباشد و این نشدنی است .

۲ـ مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه است.

یعنی ، اگر A مجموعهٔ دلخواهی باشد داریم :

$$\varnothing \subset A$$

زیرا ، اگر ∅ زیر مجموعه A نباشد در این صورت ، در ∅ باید عضوی باشد که در A نباشد و چون در مجموعهٔ تهی عضوی وجود ندارد لذا این نشدنی است.

مثال ۱ ـ دو مجموعهٔ { ۷ ، ۶ ، ۵ }=A و { ۶ ، ۵ ، ۲ ، ۱ }=B را درنظر بگیرید ، آیا A زیرمجموعهٔ B است ؟

حل : A زیرمجموعهٔ B نیست زیرا در A عضو ۷ وجود دارد که در B نیست .

مثال ۲ ـ تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ :

$$A=\{a , b , c\}$$

را بنویسید .

حل : الف ـ طبق آنچه گفته شد ∅ زیرمجموعهٔ A است

ب ـ زیرمجموعه‌های یك عضوی عبارتند از { a } ، { b } ، { c }

ج ـ زیرمجموعه‌های دو عضوی عبارتند از {a ، c} ، { a ، b } ، { b ، c }

د ـ تنها زیرمجموعهٔ سه عضوی خود مجموعه یعنی { a ، b ، c } می‌باشد .

دراین مثال عدهٔ عضوهای A برابر ۳ و تعداد زیر مجموعه‌های آن ۸ یعنی $۲^۳$ می‌باشد.

مثال ۳ ـ تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ :

$$B=\{ ۱ , ۲ , ۳ , ۴ \}$$

را بنویسید .

حل :

ـ زیرمجموعهٔ بدون عضو : ∅

ـ زیرمجموعه‌های تك عضوی : {۱} ، {۲} ، {۳} ، {۴}

ـ زیرمجموعه‌های دوعضوی : {۳ ، ۴} ، {۲ ، ۴} ، {۲ ، ۳} ، {۱ ، ۴} {۱ ، ۳} ، {۱ ، ۲}

ـ زیرمجموعه‌های سه‌عضوی : {۱ ، ۳ ، ۴} ، {۲ ، ۳ ، ۴} ، {۱ ، ۲ ، ۴} ، {۱ ، ۲ ، ۳}

ـ زیرمجموعهٔ چهار عضوی : {۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴}

در این مثال عدهٔ عضوهای B برابر ۴ و تعداد زیرمجموعه‌هایش ۱۶ یعنی $۲^۴$ است . با استفاده

ازاین دومثال ، آیا می‌توانید تعداد زیرمجموعه‌های یك مجموعه‌که دارای n عضو متمایز است ، حدس بزنید ؟

مثال ۴ – در مجموعهٔ $A=\{a ، b ، c\}$ ، دو مفهوم زیر با هم چه فرقی دارند .

$$a\in\{a ، b ، c\}$$

$$\{a\} \subset \{a ، b ، c\}$$

حل : اولی به معنای این است‌که a عضو A می‌باشد ، ولی دومی بیان می‌کندکه مجموعهٔ یك‌عضوی $\{a\}$ زیرمجموعه‌ای از A است. توجه به اختلاف این دو مفهوم ضروری است.

به مطلب زیر توجه‌کنید :

برای هرسه مجموعهٔ A ، B و C ، هرگاه A زیرمجموعهٔ B و B زیر مجموعهٔ C باشد ،آن‌گاه A زیر مجموعهٔ C است . به عبارت دیگر، از $A\subset B$ و $B\subset C$ نتیجه می‌شود $A\subset C$ و یا بزبان ریاضی : $(A\subset B \wedge B\subset C) \Rightarrow A\subset C$

برای نشان دادن درستی مطلب فوق ، در فرض داریم : $A\subset B$

طبق تعریف زیرمجموعه : $\therefore\ x\in A \Rightarrow x\in B \quad (۱)$

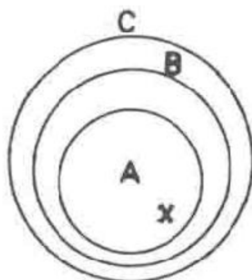
(سه نقطه یعنی نتیجه می‌شود)

همچنین در فرض داریم : $B\subset C$

طبق تعریف زیر مجموعه: $\therefore\ x\in B \Rightarrow x\in C \quad (۲)$

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود : $x\in A \Rightarrow x\in C$

طبق تعریف زیر مجموعه $\therefore\ A\subset C$



مثال ۱ – شکلهای زیر مثالهایی جهت نشان دادن درستی مطلب فوق می‌باشند.



مجموعه‌های مساوی

هرگاه $P=\{۳ ، ۵ ، ۷\}$ و $Q=\{۵ ، ۷ ، ۳\}$ ، مفروض باشند ، با توجه به‌این‌که :

هر مجموعه با عضوهای خود مشخص می‌شود

P و Q هر دو نام یك مجموعه می‌باشند . به‌عبارت دیگر ، مـا یك مجموعه داریم نه دو مجموعهٔ متفاوت . این مطلب را به صورت :

$$P=Q$$

نشان داده می‌گوییم P و Q مساوی هستند .

مجموعه‌های $A=\{۱ ، ۲ ، ۳\}$ و $B=\{۱ ، ۲ ، ۲ ، ۳\}$ نیز مساویند . یعنی :

$$A=B$$

همچنین در مورد دو مجموعهٔ :

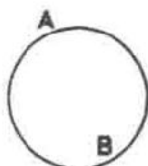
$C=\{a ، b ، c\}$ و $D=\{x \mid$ x یکی از سه حرف اول الفبای لاتین است $\}$

می‌توان نوشت :

$$C=D$$

تعریف – مجموعهٔ A مساوی مجموعهٔ B است ، هرگاه هرعضو A ، عضو B بوده وهر عضو

B نیزعضو A باشد .



یعنی دو مجموعهٔ A و B را مساوی گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$A \subset B$$

و

$$B \subset A$$

یا

$$(A = B) \Longleftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

ازاین تعریف معمولا بـرای اثبات تساوی دو مجموعه استفاده می‌شود .

مثال – هرگاه

$$A \subset \varnothing \qquad (۱)$$

نشان دهید که :

$$A = \varnothing$$

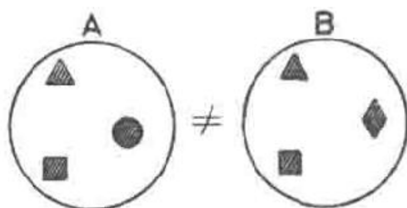
حل : چون $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه است پس ،

$$\varnothing \subset A \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) با توجه به تعریف فوق نتیجه می‌شود که $A = \varnothing$.

دو مجموعهٔ نامساوی

هرگاه دو مجموعهٔ A و B مساوی نباشند می‌نویسیم :



$$A \neq B$$

در این صورت لااقل یك عضو در یکی وجود دارد که به‌دیگری تعلق ندارد.

$$(A \neq B) \Longleftrightarrow (\exists x \text{ و } x \in A \wedge x \notin B) \vee (\exists x \text{ و } x \in B \wedge x \notin A)$$

مثال – آیا دو مجموعهٔ $A = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\}$ و $B = \{۱ ، ۲ ، ۵\}$ مساویند ؟

حل : چون درمجموعهٔ A عضوی وجود داردکه در B نیست، دو مجموعهٔ A و B مساوی نیستند. یعنی، $\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\} \neq \{۱ ، ۲ ، ۵\}$

تذکر ۱– فرض کنیم $A = \{a ، b ، c\}$ ، ازآنچه دربالا دیدید نتیجه می‌شود که :

الف – اگر عضوهای مجموعهٔ A تکرار شوند ، مجموعه‌ای مساوی A بدست می‌آید :

$$A=\{a , b , c\}$$
$$=\{a , a , b , b , c\}$$

به عبارت دیگر ، در نوشتن یك مجموعه تکرار عضوها بی‌اثر است .

ب ــ اگر جــای عضوهای مجموعهٔ A با هم عوض شوند ، مجموعه‌ای مساوی A بدست می‌آید :

$$A=\{a , b , c\}$$
$$=\{b , a , c\}$$

به عبارت دیگر ، در نوشتن یك مجموعه ترتیب عضوها مهم نیست.

ج ــ مجموعهٔ A را می‌توان به‌طریق نام بردن عضوها یا با علائم ریاضی نشان داد :

$$A=\{a , b , c\}$$
= { x | x یکی از سه حرف اول الفبای لاتین است }

تذکر ۲ ــ هرگاه A و B و C سه مجموعهٔ دلخواه باشند ، دیدیم که :

الف ــ $A\subset A$.

ب ــ اگر $A\subset B$ و $B\subset A$ ، آن‌گاه $A=B$ یا ،

$$(A\subset B\wedge B\subset A)\Longrightarrow A=B$$

ج ــ اگر $A\subset B$ و $B\subset C$ ، آن‌گاه $A\subset C$ یا ،

$$(A\subset B\wedge B\subset C)\Longrightarrow A\subset C$$

همچنین در مورد تساوی مجموعه‌ها داریم (چرا ؟) :

الف ــ $A=A$.

ب ــ اگر $A=B$ ، آن‌گاه $B=A$ یا ، $(A=B)\Longrightarrow(B=A)$

ج ــ اگر $A=B$ و $B=C$ ، آن‌گاه $A=C$ یا ،

$$[(A=B)\wedge(B=C)]\Longrightarrow(A=C)$$

تمرین

۱ــ با چهار مثال مختلف مجموعهٔ تهی را معرفی کنید .

۲ــ چهار مثال برای مجموعهٔ یك عضوی بنویسید .

۳ــ مجموعهٔ اعداد زوج اول ، یك مجموعهٔ چند عضوی است ؟

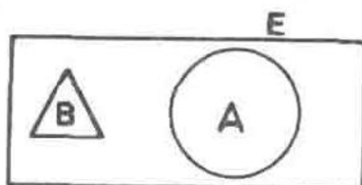
۴ـ آیا مجموعهٔ اعداد اول ، زیرمجموعهٔ اعداد فرد است ؟ چرا ؟

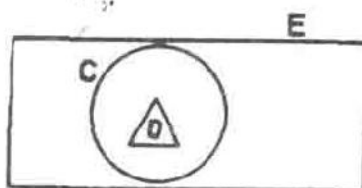
۵ـ مفاهیم زیررا با استفاده ازعلامات $\in$ ، $\notin$ ، $\subset$ و $\not\subset$ نشان دهید. «a متعلق بهA است»، «A زیرمجموعهٔ E است»، «A زیرمجموعهٔ B نیست»، «b عضوی از B نیست»، «B زیرمجموعهٔ D است»، «b در F است»، «مجموعهٔ D شامل عضوهای مجموعهٔ E است»، «هیچ عضوی در E نیست که در مجموعهٔ F نباشد»، «در A عضوی هست که در F نیست».

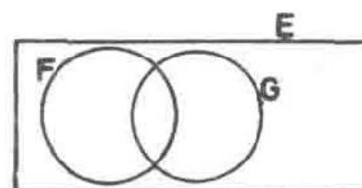
۶ـ مجموعه‌های $E=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶\}$ و $F=\{۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸\}$ و $G=\{۲ ، ۴\}$ را در نظر بگیرید ، از گزاره‌های زیر کدام درست است :

$F\subset E$ ، $G\subset F$ ، $G\subset G$ ، $G\subset F\subset E$

۷ ـ در شکلهای پایین رابطهٔ بین مجموعه‌ها بانمودار ون نمایش داده شده است. این‌روابط را با استفاده از علامت $\subset$ نشان دهید.







۸ـ هرگاه N و E و F و P به‌ترتیب نمایش مجموعه‌های : اعداد طبیعی ، اعداد زوج مثبت ، اعداد فرد مثبت و اعداد اول باشند ، کدام یك از گزاره‌های زیر درست است:

$E\subset N$ ، $E\subset F$ ، $P\subset E$ ، $P\subset N$ ، $\emptyset\subset P$ ، $F\subset N$

۹ـ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمودار ون نمایش دهید:

$F\subset N\subset Q$ ، $E\subset N\subset Z$ ، $P\subset Q\subset R$

۱۰ـ مجموعهٔ مساوی هریك از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

$\{a ، a ، b ، b\}$ ، $\{۱ ، ۲ ، ۲ ، ۳ ، ۳ ، ۵\}$ ، $\{۳ ، ۳ ، ۵ ، ۵\}$

۱۱ـ مجموعهٔ :

$$A=\{x \mid x\in N \ \text{و}\ 1\leqslant x\leqslant 9\}$$

را در نظر بگیرید ، سپس با استفاده از علائم ریاضی ، مجموعه‌های زیر را بنویسید :

الف ــ زیرمجموعه‌ای از A که عضوهای آن زوج باشد .

ب ــ زیرمجموعه‌ای از A که عضوهای آن فرد باشد .

۱۲ـ تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{a ، e ، i ، o ، u\}$ را بنویسید .

۱۳ـ تعداد همهٔ زیرمجموعه‌های یك مجموعه 2^{12} است . این مجموعه چند عضو دارد .

۱۴ـ عبارات زیر را کامل کنید :

الف ــ از $D\subset E$ و $E\subset D$ نتیجه می‌شود که . . . .

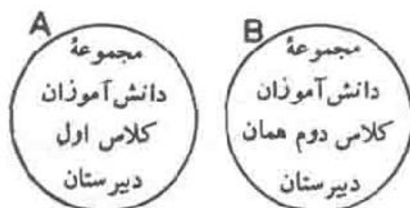
ب ــ از $E\subset F$ و $F\subset K$ نتیجه می‌شود که . . . .

ج ــ از . . . و $K\subset L$ نتیجه می‌شود که $K=L$

۱۵ـ دو گزارهٔ $A\not\subset B$ و $A\neq B$ چه فرقی دارند ؟

۱۶ـ خواص علامت $\subset$ درمجموعه‌ها با خواص علامت $\leqslant$ (کوچکتر یامساوی است) در اعداد را باهم مقایسه کنید .

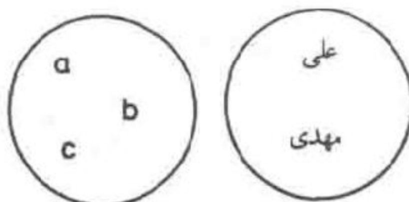
دو مجموعهٔ جدا از هم



اگر A مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس اول یك دبیرستان و B مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس دوم همان دبیرستان فرض شود، روشن است که هیچ دانش‌آموزی در دو کلاس تحصیل نمی‌کند.

به عبارت دیگر دو مجموعهٔ A و B دارای عضو مشترکی نیستند .

همچنین مجموعه‌های :

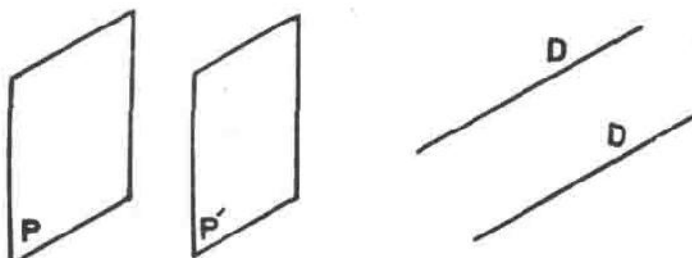


{علی ، مهدی} ، $\{a ، b ، c\}$

عضو مشترکی ندارند .

در هندسه ، هرگاه خط و صفحه مجموعه‌ای از نقاط فرض شوند دو خط متوازی غیرمنطبق

یا دو صفحهٔ متوازی غیر منطبق مجموعه‌های جدا از هم می‌باشند .



تعریف - دو مجموعهٔ ناتهی که دارای هیچ عضو مشترکی نباشند، دو مجموعهٔ جدا از هم خوانده می‌شوند.

مجموعه مرجع (جهانی)

در مطالعهٔ مجموعه‌ها ما بادسته‌های مختلف اشیا سروکار داریم. لذا برای روشن بودن مطلب و جلوگیری از ابهام ضرورت دارد که تمام اشیای مورد هربحث را مشخص نماییم. به‌مجموعهٔ این اشیای مورد نظر مجموعهٔ مرجع گفته می‌شود. درحساب وجبر اشیای مورد بحث معمولا اعداد حقیقی می‌باشد. مجموعهٔ اعداد حقیقی‌را مجموعهٔ مرجع در حساب وجبر درنظر می گیریم. درهندسهٔ مسطحه، معمولا اشیای موردنظر مجموعهٔ نقاط‌صفحه است، بنابراین مجموعهٔ نقاط صفحه رامی‌توان بعنوان مجموعه مرجع در هندسهٔ مسطحه‌گرفت. وقتی از اشخاص صحبت می‌شود، مجموعهٔ مرجع می‌تواند مجموعهٔ انسانها باشد. وقتی از رویدنیها گفتگو می کنیم، مجموعهٔ‌مرجع می‌تواند مجموعه گیاهان باشد.

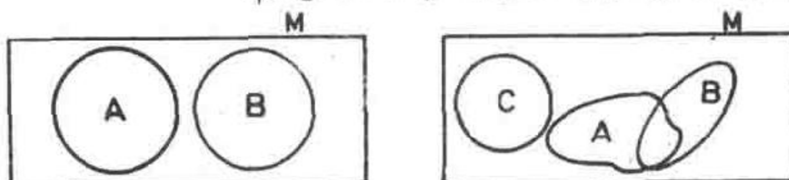
دریك بحث معین ، تمام عضوهای مجموعه‌های مورد مطالعه متعلق به‌مجموعه‌ای موسوم‌به مجموعهٔ مرجع می‌باشند . به‌عبارت دیگر، هربحث دلخواه گفتگویی است در بارهٔ زیرمجموعه‌های یك‌مجموعهٔ مرجع .

مجموعهٔ مرجع را با حرف M نمایش می‌دهیم[1]. اگر M مجموعهٔ مرجع باشد هر مجموعه مورد بحث زیرمجموعه‌ای از M می‌باشد.

باید توجه داشت‌که به مقتضای بحث ، مجموعه‌های مختلفی را می‌توان به‌عنوان مجموعهٔ مرجع انتخاب کرد . همچنین وقتی از مجموعه‌های A ، B ، C ، . . . بحث می‌شود ما این مجموعه‌ها را زیرمجموعه‌های یك مجموعهٔ مرجع فرض می کنیم و اعمالی که روی آنها انجام می‌دهیم با توجه به‌این فرض می‌باشد.

۱ــ در این‌کتاب حرف M را منحصراً برای مجموعهٔ مرجع به‌کار می‌بریم .

از نظر نموداری ، مجموعهٔ مرجع را معمولا به‌شکل مستطیل و مجموعه‌های مورد مطالعه را به شکل دایره و یا هرمنحنی بستهٔ دیگری داخل آن نشان می‌دهیم .



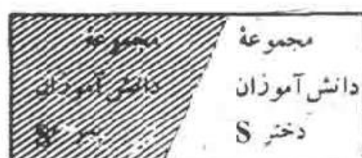
متمم یك مجموعه

هرگاه مجموعهٔ دانش‌آموزان کشور را مجموعهٔ مرجع M بنامیم ، این دانش‌آموزان را ممکن است به دو دستهٔ دختر و پسر تقسیم نمود.

اگر S مجموعهٔدانش‌آموزان دختر کشورباشد ، منظور ازمتمم S (نسبت به M)که با 'S نمایش **داده می‌شود ، مجموعهٔ دانش‌آموزانی‌ازکشور است که دختر نیستند.**

(Mنسبت به) S متمم = 'S

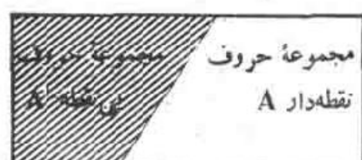
مجموعهٔ دانش‌آموزان‌کشور ، M



یك مثال دیگر ــ اگرمجموعهٔ تمام حروف الفبای فارسی را مجموعه مرجع M بنامیم،همان **طور که می‌دانید، این حروف به دو دستهٔ‌نقطه‌دار و بی‌نقطه تقسیم می‌شوند . اگر A مجموعهٔ حروف نقطه‌دار باشد،** منظور از متمم**A (نسبت بهM)که آن را به'A** نمایش **می‌دهیم مجموعهٔ حروفی از** الفبای فارسی **است که نقطه‌ندارند .**

(Mنسبت به) A متمم = 'A

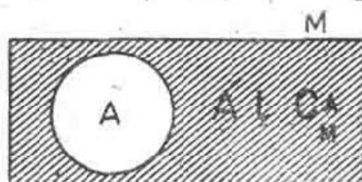
مجموعهٔ حروف الفبای فارسی M



تعریف ــ اگر A مجموعهٔ دلخواه و M مجموعهٔ مرجع باشد ، **منظور از متمم A ، مجموعهٔ عضوهای M است‌که متعلق بهA نباشند .**

متمم مجموعهٔ A (نسبت بهM) با 'A یا با $C_M A$ نمایش داده می‌شود[1]. یعنی :

A متمم مجموعهٔ $= C_M A = A'$



۱ــ متمم'A را با $\overline{A}$ هم نمایش می‌دهند .

ما در این کتاب برای سهولت متمم A (نسبت به M) را منحصراً با A' نمایش داده به‌طور ساده می‌گوییم «A' متمم A است» یعنی از ذکر جملهٔ «نسبت به M» خودداری می‌کنیم.

A و A' دو مجموعهٔ جدا از هم می‌باشند. چرا ؟

با توجه به تعریف فوق می‌توان نوشت:

$$A' = \{ x \mid x \in M \text{ و } x \notin A \}$$

که خوانده می‌شود «A' مجموعه‌ای است با عضوهای x به قسمی که x متعلق به M است و x متعلق به A نیست».

از این تعریف نتیجه می‌شود که:

اگر $x \in A$ ، خواهیم داشت $x \notin A'$ و

اگر $x \in A'$ ، خواهیم داشت $x \notin A$.

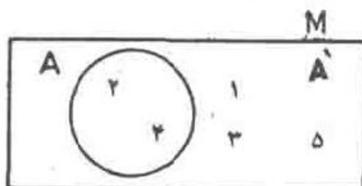
مثال ۱ ــ مجموعهٔ $A = \{۲ ، ۴\}$ ازمجموعهٔ مرجع $M = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}$ را درنظر بگیرید، آن‌گاه مجموعهٔ A' را بنویسید.

حل : $M = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}$

$A = \{۲ ، ۴\}$

$A' = \{۱ ، \not{۲} ، ۳ ، \not{۴} ، ۵\}$

$A' = \{۱ ، ۳ ، ۵\}$



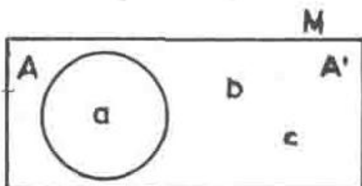
مثال ۲ ــ مجموعهٔ $A = \{a\}$ از مجموعهٔ مرجع $M = \{a ، b ، c\}$ را در نظر بگیرید، آن‌گاه مجموعهٔ A' را بنویسید.

حل : $M = \{a ، b ، c\}$

$A = \{a\}$

$A' = \{\not{a} ، b ، c\}$

$A' = \{b ، c\}$



چند نکتهٔ مهم

۱ ــ

واضح است که اگر دو مجموعه مساوی باشند، متممهای آنها نیز مساوی خواهد بود. به‌عبارت دیگر برای هر دو مجموعهٔ A و B ، از $A = B$ نتیجه می‌شود $A' = B'$.

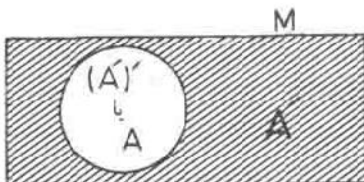
۲ —

> متمم مجموعهٔ مرجع مساوی مجموعهٔ تهی است.
>
> یعنی : $M' = \varnothing$

برای نشان دادن درستی این مطلب ،گوییم منظور از M' یعنی مجموعه‌ای که عضوهای آن در M نباشند . چون در اینجا M شامل تمام عضوهـای مورد بحث می‌باشد ، لذا در M' عضوی باقی نخواهد ماند . به‌عبارت دیگر ، متمم مجموعهٔ مرجع مجموعهٔ تهی خواهد بود .

۳ —

> متمم متمم یک مجموعه، مساوی خود آن مجموعه است . یعنی برای هـر مجموعهٔ A داریـم :
>
> $(A')' = A$



مجموعهٔ $(A')'$ ، بنابر تعریف مجموعهٔ متمم ، مجموعه‌ای است که عضوهای آن متعلق به‌M بوده و در A' نباشند . چون هرعضو M یامتعلق به‌A یا متعلق به‌A' است پس عضوهایی از M که در A' نباشند به‌ناچار در A خواهند بود به عبارت دیگر ، مجموعـهٔ $(A')'$ همان مجموعهٔ A می‌باشد . این مطلب را با علائم ریاضی به‌صورت زیر بیان می‌کنند :

$$(A')' = \{x \mid x \in M \text{ و } x \notin A'\}$$
$$= \{x \mid x \in M \text{ و } x \in A\}$$
$$= A$$

۴ —

> متمم مجموعهٔ تهی، مساوی مجموعهٔ مرجع است یعنی، $\varnothing' = M$

در قسمت ۲ دیدید که :

$$M' = \varnothing$$

در قسمت ۱ نیز گفتیم «اگر دومجموعه مساوی باشند متممهای آنها نیز مساوی است .» پس :

$$(M')' = \varnothing'$$

درقسمت ۳ نیزدیدیدکه «متمم‌متمم یك‌مجموعه مساوی‌خود مجموعه‌است» لذا نتیجه می‌شود ،

$$M=\varnothing'$$

مثال ــ مجموعهٔ $\{۱ ، ۲\}=A$ از مجموعهٔ مرجع $\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}=M$ را در نظر گرفته نشان دهیدکه : $M'=\varnothing$ ، $(A')'=A$

حل :

$$M=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}$$
$$M'=\{\not{۱} ، \not{۲} ، \not{۳} ، \not{۴} ، \not{۵}\}$$
$$=\varnothing$$
$$A'=\{\not{۱} ، \not{۲} ، ۳ ، ۴ ، ۵\}$$
$$=\{۳ ، ۴ ، ۵\}$$
$$(A')'=\{۱ ، ۲ ، \not{۳} ، \not{۴} ، \not{۵}\}$$
$$=\{۱ ، ۲\}$$
$$=A$$

تمرین

۱ـ سه مثال برای دومجموعهٔ جدا از هم بزنید .

۲ـ آیا مجموعهٔ مردان ومجموعهٔ ریاضی‌خوانها دومجموعهٔ جدا ازهم هستند ؟

۳ـ آیا دومجموعهٔ $(A')'$ و A' جدا ازهم هستند ؟

۴ـ سه مجموعهٔ A و B وC را در نظر بگیرید ،کدام یك ازگزاره‌های زیردرست است ؟

الف ــ A و A جدا از هم هستند .

ب ـ اگر A و B جدا از هم باشند ، آن گاه B و A نیز جدا از هم هستند .

ج ـ اگر A و B جدا از هم بوده ، B و C نیز جدا از هم باشند ، آن‌گاهA و C جدا از هم خواهند بود .

۵ ــ عبارات زیر راکامل کنید :

الف ــ مجموعهٔ اعداد یك رقمی ومجموعهٔ اعداد دو رقمی دومجموعهٔ . . . هستند .

ب ـ مجموعهٔ اعداد فرد ومجموعهٔ اعداد . . . دو مجموعهٔ جدا از هم هستند .

۶ــ مجموعهٔ مرجع M ، مجموعهٔ انسانها فرض شده است . در مثالهای زیرمجموعه‌هایی راکه ممکن است M مجموعهٔ مرجع آنها انتخاب شود نام ببرید :

الف ــ مجموعهٔ مردان

ب ــ مجموعهٔ ریاضی‌خوانها

ج ــ مجموعهٔ تاکسیهای شهرشما

د ـ مجموعهٔ فوتبالیستهای تیم ملی ایران

ه ــ مجموعهٔ {حافظ ، سعدی ، فردوسی ، مولوی ، خیام}

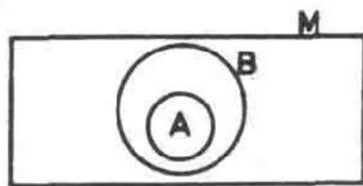
۷ ــ اگر دو مجموعه جدا ازهم باشند آیا متممهای آنها نیز جدا ازهم خواهند بود ؟

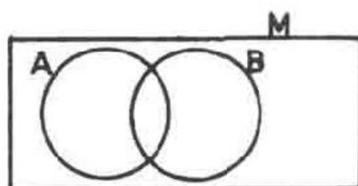
۸ ــ مجموعهٔ مرجع $M=\{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه‌های $A=\{a, c\}$ و $B=\{d, e\}$ را در نظر بگیرید ، آن‌گاه :

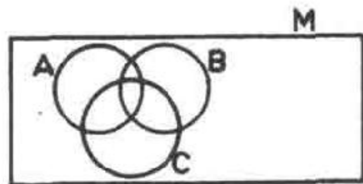
الف ــ مجموعه‌های A' و B' را بنویسید ؛

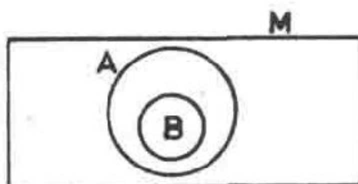
ب ــ نشان دهید که $(A')'=A$ و $M'=\varnothing$

۹ ــ متمم مجموعهٔ A را درشکلهای زیر سایه بزنید .

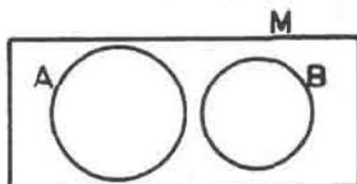








۱۰ ــ متمم مجموعهٔ B را درشکل زیرسایه بزنید .



آیا $A \subset B'$ ؟ چرا ؟ ثابت‌کنید.

۱۱ ــ هرگاه A و B دومجموعه و $A \subset B$ ، با استفاده ازنمودار وِن و سایه‌زدن تحقیق کنید :

الف ــ آیا $B' \subset A'$ ؟

ب ــ آیا A و B' جدا از هم هستند ؟

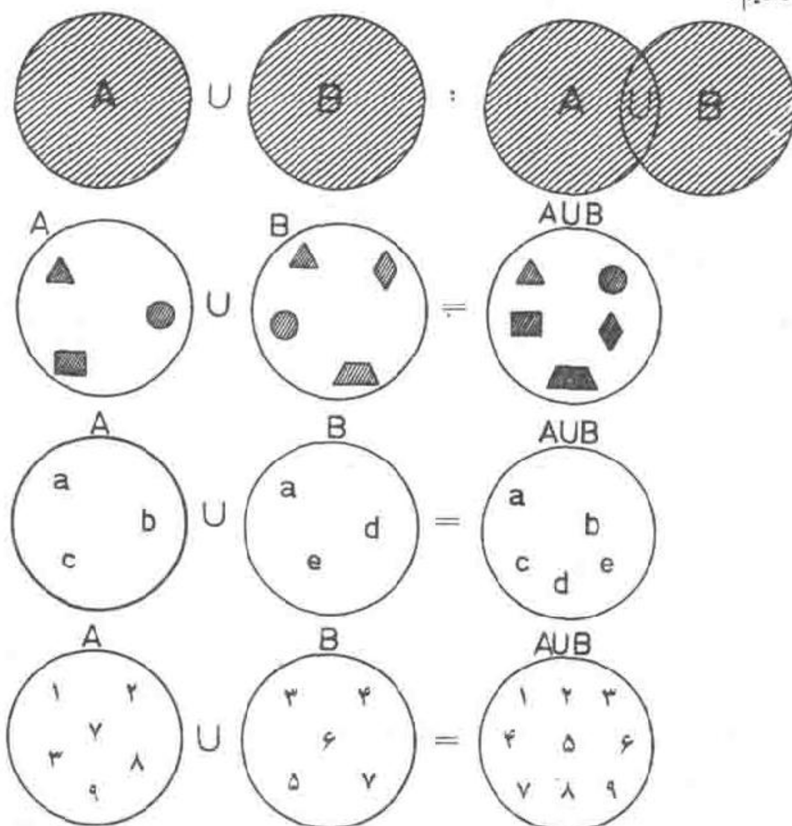
ج ــ قسمت «ب» را بدون استفاده از نمودار وِن ثابت‌کنید .

فصل ۲

اعمال بین مجموعه‌ها

اجتماع دو مجموعه

در دورهٔ راهنمایی ، اجتماع دومجموعهٔ A و B را با استفاده ازنمودار ون به‌صورتهای زیر نمایش دادیم :



تعریف ــ اجتماع دو مجموعهٔ A و B که با نماد $A \cup B$ نموده می‌شود ، مجموعه‌ای است از همهٔ عضوهایی که هرکدام از آنها متعلق به A یا به B یا به هردو باشد .

معمولا «هر دو» را نیز حذف‌کرده به‌طور اختصار می‌گوییم :

$A\cup B$ ، مجموعه‌ای است از همهٔ عضوهایی که هرعضو متعلق به A یامتعلق به B باشد[1] .
$A\cup B$ را می‌خوانیم «اجتماع A ، B»

مثال ۱ — دومجموعهٔ $A=\{a ، b ، c\}$ و $B=\{b ، c ، d ، e\}$ را درنظر بگیرید ، آن‌گاه مجموعهٔ $A\cup B$ را بنویسید .

حل :

$$A=\{a ، b ، c\}$$
$$B=\{b ، c ، d ، e\}$$
$$A\cup B=\{a ، b ، c\}\cup\{b ، c ، d ، e\}$$
$$=\{a ، b ، c ، d ، e\}$$

مثال ۲ — مجموعهٔ $A=\{۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷\}$ ازمجموعهٔمرجع $M=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷\}$ را در نظر بگیرید ، آن‌گاه مجموعه‌های زیر را بنویسید :

$A\cup A$ ؛ $A\cup\varnothing$ ؛ $A\cup M$ ؛ $A\cup A'$

حل :

$$A=\{۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷\}$$
$$A\cup A=\{۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷\}\cup\{۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷\}$$
$$A\cup A=\{۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷\}$$

$$A\cup\varnothing=\{۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷\}\cup\{\ \}$$
$$=\{۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷\}$$

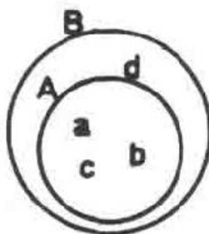
$$M=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷\}$$
$$A\cup M=\{۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷\}\cup\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷\}$$
$$=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷\}$$

$$A'=\{\cancel{۱} ، ۲ ، \cancel{۳} ، ۴ ، \cancel{۵} ، ۶ ، \cancel{۷}\}$$
$$=\{۲ ، ۴ ، ۶\}$$
$$A\cup A'=\{۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷\}\cup\{۲ ، ۴ ، ۶\}$$
$$=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷\}$$

با توجه به‌این مثال چه نتایجی را می‌توان حدس زد .

۱ـ یعنی این «یا» هر دو را نیزشامل است .

مثال ۳ ـ دومجموعهٔ $A=\{a ، b ، c\}$ و $B=\{a ، b ، c ، d\}$ را درنظر بگیرید ، آن‌گاه مجموعهٔ $A\cup B$ را بنویسید .



حل :

$A=\{a ، b ، c\}$

$B=\{a ، b ، c ، d\}$

$\{a ، b ، c\}\subset\{a ، b ، c ، d\}$

$A\cup B=\{a ، b ، c\}\cup\{a ، b ، c ، d\}$

$=\{a ، b ، c ، d\}$

از این مثال چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت ؟

تعریف $A\cup B$ با علائم ریاضی

مجموعهٔ $A\cup B$ را با علائم ریاضی بصورت زیر تعریف می کنند :

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}$$

و می‌خوانند «$A\cup B$ ، مجموعه‌ای است با عضوهای x بقسمی که x متعلق به A یا x متعلق به B است . »

بعبارت دیگر :

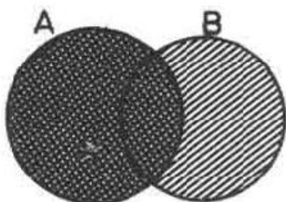
الف ـ از $x\in A$ نتیجه می‌شود $x\in A\cup B$ ، یعنی : $x\in A \Rightarrow x\in A\cup B$

ب ـ از $y\in B$ نتیجه می‌شود $y\in A\cup B$ ، یعنی : $y\in B \Rightarrow y\in A\cup B$

ج ـ از $x\in A$ یا $x\in B$ نتیجه می‌شود $x\in A\cup B$ وبرعکس یعنی :

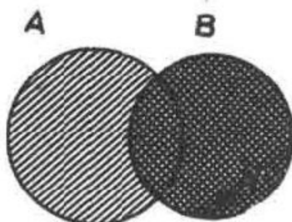
$x\in A \vee x\in B \Leftrightarrow x\in A\cup B$

از قسمت الف با توجه به‌تعریف زیرمجموعه نتیجه می‌شودکه برای هردومجموعهٔ A وB :



$A\subset A\cup B$

همچنین از قسمت ب نتیجه می‌شود :



$B\subset A\cup B$

یعنی ،

هرکدام ازمجموعه‌های A و B ، زیرمجموعه‌ای از اجتماع A و B هستند.

تذکرمهم — برای هر $x \in A$ ، نتیجه می‌شود : $x \in A \cup X$ یعنی :

$$x \in A \rightarrow x \in A \cup X$$

که X مجموعهٔ دلخواهی است . به‌عبارت دیگر برای هرمجموعهٔ A می‌توان نوشت :

$$A \subset A \cup X$$

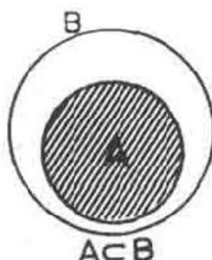
همچنین در مورد سه مجموعه

$$x \in A \rightarrow x \in (A \cup B)$$

$$x \in A \cup B \rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$$

به‌قضیه زیر توجه‌کنید :

قضیه- هر گاه A زیرمجموعهٔ B باشد ، آن گاه اجتماع دومجموعهٔ A و B مساوی B خواهدبود. به‌عبارت دیگر ، برای هر A و B از $A \subset B$ نتیجه می‌شود $A \cup B = B$ یا بزبان ریاضی : $$A \subset B \rightarrow A \cup B = B$$



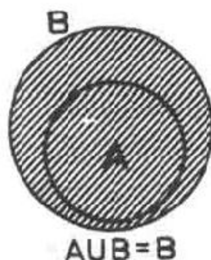
$A \subset B$

برای بیان درستی مطلب فوق باید نشان دهیم که :

$$B \subset A \cup B \qquad (۱)$$

$$A \cup B \subset B \qquad (۲)$$

درستی تساوی (۱) را درصفحهٔ قبل دیده‌ایـد . برای بیان درستی (۲) ، طبق تعریف زیرمجموعه ، باید نشان دهیم که هرعضو $A \cup B$ عضو B نیز می‌باشد :



$A \cup B = B$

$$x \in A \cup B \rightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$\rightarrow x \in B \vee x \in B \quad : A \subset B \text{ چون}$$

$$\rightarrow x \in B$$

پس

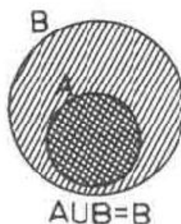
$$A \cup B \subset B \qquad (۲)$$

ازمقایسهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود ،

$$A \cup B = B$$

عکس قضیه فوق :

> قضیه- هرگاه اجتماع دو مجموعهٔ A و B مساوی B باشد، آن‌گاه A زیر مجموعهٔ B است . به عبارت دیگر، برای هردومجموعهٔ A و B از $A \cup B = B$ نتیجه می‌شود $A \subset B$ یا بزبان ریاضی :
>
> $$(A \cup B = B) \Rightarrow (A \subset B)$$



$A \cup B = B$

قبلا دیده‌اید که :

$$A \subset A' \cup B \quad (۳)$$

در اینجا نیز داریم $A \cup B = B$. پس اگردر(۳)به‌جای مجموعهٔ $A \cup B$ ، مجموعهٔ مساوی آن B را قرار دهیم نتیجه می‌شود :



$A \subset B$

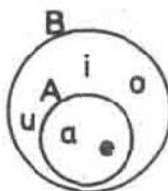
$$A \subset B$$

دو قضیه فوق به صورت زیر قابل بیان هستند :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$$

مثال ۱ - مجموعه‌های $A = \{a ، e\}$ و $B = \{a ، e ، i ، o ، u\}$ را درنظر بگیرید ،آن‌گاه نشان دهید که $A \cup B = B$.

حل :



$$A = \{a ، e\}$$

$$B = \{a ، e ، i ، o ، u\}$$

$$\{a ، e\} \subset \{a ، e ، i ، o ، u\}$$

$$A \cup B = \{a ، e\} \cup \{a ، e ، i ، o ، u\}$$

$$= \{a ، e ، i ، o ، u\}$$

$$= B$$

مثال ۲ - مجموعهٔ $A = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\}$ ، ازمجموعهٔ مرجع $M = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}$ را در نظر بگیرید ، آن‌گاه نشان دهید که :

$$A \cup A = A \text{ ؛ } A \cup M = M \text{ ؛ } \varnothing \cup A = A \text{ ؛ } A \cup A' = M$$

حل :

$$A=\{۱،۲،۳،۴\}$$

$$A\cup A=\{۱،۲،۳،۴\}\cup\{۱،۲،۳،۴\}$$

$$=\{۱،۲،۳،۴\}$$

$$=A$$

$$M=\{۱،۲،۳،۴،۵\}$$

$$A\cup M=\{۱،۲،۳،۴\}\cup\{۱،۲،۳،۴،۵\}$$

$$=\{۱،۲،۳،۴،۵\}$$

$$=M$$

$$\emptyset\cup A=\{\ \}\cup\{۱،۲،۳،۴\}$$

$$=\{۱،۲،۳،۴\}$$

$$=A$$

$$M=\{۱،۲،۳،۴،۵\}$$

$$A=\{۱،۲،۳،۴\}$$

$$A'=\{\not{۱}،\not{۲}،\not{۳}،\not{۴}،۵\}$$

$$A'=\{۵\}$$

$$A\cup A'=\{۱،۲،۳،۴\}\cup\{۵\}$$

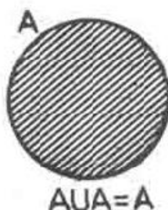
$$=\{۱،۲،۳،۴،۵\}$$

$$=M$$

چند نکتهٔ مهم

۱ـ

اجتماع هر مجموعه با خودش مساوی خود مجموعه است . به‌عبارت دیگر، هر گاه A مجموعهٔ دلخواهی باشد داریم : $A\cup A=A$.

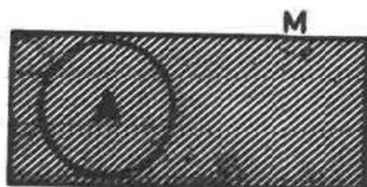


چون $A\subset A$ ، لذا طبق آنچه گفته شد خواهیم داشت :

$$A\cup A=A$$

-۲

> اجتماع هر مجموعه با مجموعهٔ مرجع مساوی مجموعهٔ مرجع است . به عبارت دیگر ؛ هرگاه A مجموعهٔ دلخواهی باشد داریم : $A \cup M = M$.



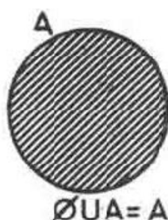
چون $A \subset M$ ، لذا خواهیم داشت :

$$A \cup M = M$$

-۳

> اجتماع مجموعهٔ تهی با هر مجموعه مساوی خود آن مجموعه است . به عبارت دیگر ، هرگاه A مجموعهٔ دلخواهی باشد داریم : $\varnothing \cup A = A$.

چون $\varnothing \subset A$. لذا خواهیم داشت :

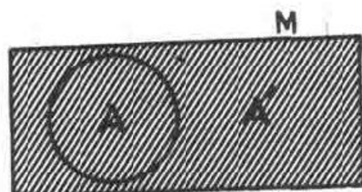


$$\varnothing \cup A = A$$

-۴

> اجتماع هر مجموعه با مجموعهٔ متممش مساوی مجموعهٔ مرجع است . به عبارت دیگر هرگاه A مجموعهٔ دلخواهی باشد داریم : $A \cup A' = M$.

برای نشان دادن درستی مطلب فوق گوییم ،



$$\forall x \in M \Rightarrow x \in A \vee x \in A' \qquad (۱)$$

$$\begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in A \cup A' \\ x \in A' \Rightarrow x \in A \cup A' \end{cases} \qquad (۲)$$

با مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$\forall x \in M \rightarrow x \in A \cup A'$$

یعنی،

$$M \subset A \cup A' \qquad (۳)$$

از طرفی هر مجموعه زیر مجموعهٔ M می‌باشد یعنی،

$$A \cup A' \subset M \qquad (۴)$$

از مقایسهٔ (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

$$A \cup A' = M$$

مثال ۱ ــ درستی تساوی زیر را نشان دهید :

$$A \cup (A \cup A') = M$$

حل : طرف چپ تساوی را ساده می‌کنیم تا طرف راست به‌دست آید :

$$A \cup (A \cup A') = A \cup M$$ چرا ؟

$$= M$$ چرا ؟

مثال ۲ ــ درستی تساوی زیر را نشان دهید :

$$(A \cup A) \cup A' = M$$

حل : طرف چپ تساوی را ساده می‌کنیم تا طرف راست به‌دست آید :

$$(A \cup A) \cup A' = A \cup A'$$ چرا ؟

$$= M$$ چرا ؟

تمرین

۱ــ درتمرینهای زیر به‌جای ? عضومناسب بگذارید :

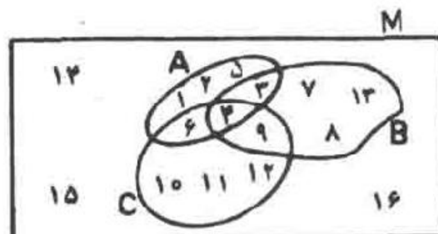
$$\{a ، b ، e\} \cup \{a ، ? ، f\} = \{a ، b ، d ، e ، f\}$$

$$\{? ، a ، g\} \cup \{a ، ? ، f\} = \{a ، b ، f ، g\}$$

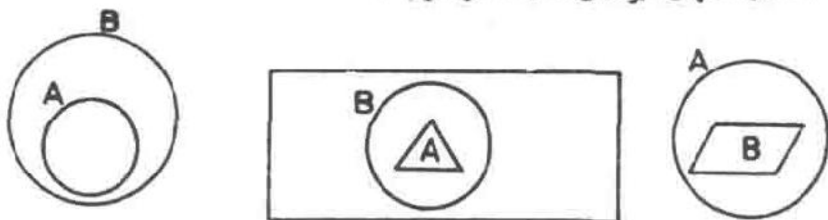
$$\{? ، ? ، i\} \cup \{? ، ? ، o ، u\} = \{a ، b ، i ، o ، u\}$$

۲ ــ با استفاده از شکل زیر، مجموعه‌های :

$A \cup (B \cup C)$ ، $(A \cup B) \cup C$ ، $B \cup C$ ، $A \cup C$ و $A \cup B$ را بنویسید .



۳ ـ در شکلهای زیر $A \cup B$ را هاشور بزنید :



۴ ـ مجموعه‌های طرف دوم تساویهای زیر را باعلائم ریاضی بنویسید :

الف ـ $\{x \mid x \in N ، ۱ < x \leqslant ۱۰\} \cup \{x \mid x \in N ، ۱۰ \leqslant x < ۱۰۰\} = \ldots$

ب ـ $\{x \mid$ x معلم ایرانی است$\} \cup \{x \mid$ x معلم آسیایی است$\} = \ldots$

ج ـ $\{x \mid$ x عدد طبیعی زوج است$\} \cup \{x \mid x \in N\} = \ldots$

۵ ـ درتساویهای زیر به‌جای ? مجموعه یا مجموعه‌های مناسب بگذارید :

$(P')' = ?$ ، $C \cup ? = M$ ، $D \cup ? = D$ ، $M' = ?$

$C \cup C' = ?$ ، $\varnothing' = ?$

۶ ـ مجموعه‌های $A = \{۱ ، ۲ ، ۴ ، ۶\}$ و $B = \{۲ ، ۴ ، ۵ ، ۷\}$ را درنظربگیرید ، سپس مجموعه‌های $A \cup B$ و $B \cup A$ را بنویسید .

ازاین تمرین چه نتیجه‌ای را می‌توان حدس زد؟

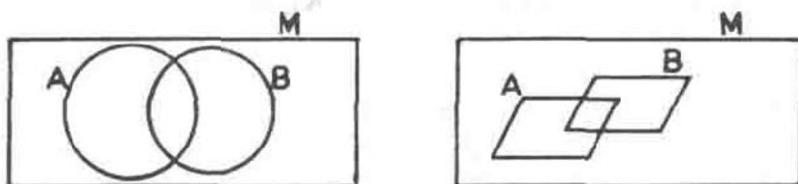
۷ ـ مجموعه‌های $A = \{a ، b ، c ، d\}$ و $B = \{a ، e ، c\}$ و $C = \{c ، d ، e\}$ را در نظر بگیرید . سپس مجموعه‌های : $(A \cup B) \cup C$ و $A \cup (B \cup C)$ را بنویسید .

ازاین تمرین چه نتیجه‌ای را می‌توان حدس زد؟

۸ ـ مجموعه‌های $A = \{۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶\}$ و $B = \{۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸\}$ از مجموعهٔ مرجع $M = \{۱ ، ۲ ، \ldots ، ۹\}$ را در نظر بگیرید ، سپس مجموعه‌های زیررا بنویسید :

$A \cup \varnothing$ ، $A \cup M$ ، $A \cup A'$ ، $(A \cup B)'$ ، $B \cup B'$

۹ ـ درشکلهای زیر $(A \cup B)'$ را سایه بزنید :



۱۰ ـ هرگاه A و B دومجموعهٔ جدا ازهم و M مجموعهٔ مرجع باشد ، با استفاده ازنمودار ون وسایه زدن نشان دهید که $A \cup B' = B'$.

۱۱ - هرگاه A زیرمجموعهٔ B باشد ، با استفاده از نمودار ون و سایه زدن نشان دهید که

$$A' \cup B = M$$

۱۲ - ثابت کنید که هرگاه $A \cup B = \varnothing$ ، آن‌گاه $A = \varnothing$ و $B = \varnothing$.

۱۳- هرگاه $C \cup D = D$ ، دومجموعهٔ C و D نسبت به‌هم چگونه‌اند ؟

۱۴ - آیا از $a \in E \cup F$ می‌توان نتیجه گرفت $a \in E$ ؟ چرا ؟

۱۵- ازگزاره‌های زیر کدامها درست است ؟

الف - $(A \cup B) \subset (A \cup B) \cup D$

ب - $D \subset (D \cup C)$

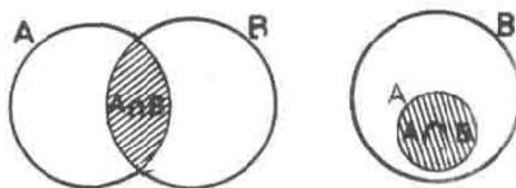
ج - $(A \cup B) \subset A$

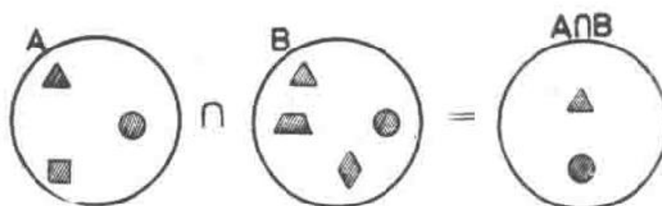
د - $(A \cup B)' \subset (A \cup B)$

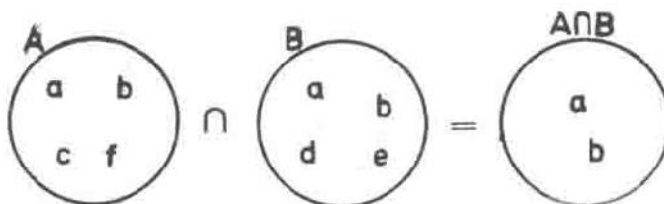
ه - $(B \cup C) \subset D \cup (B \cup C)$

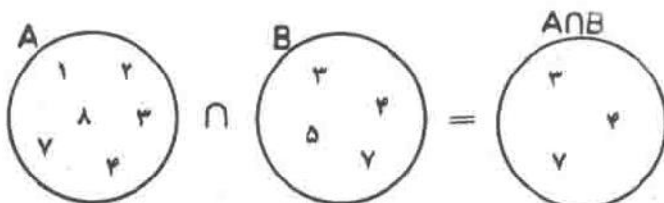
اشتراك دومجموعه

در دورهٔ راهنمایی ، اشتراك دومجموعهٔ A و B را با استفاده از نمودار ون به‌صورتهای زیر مشاهده کرده‌اید :





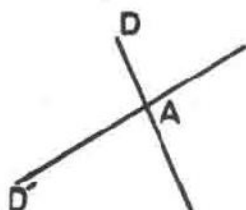




تعریف ـ اشتراک دو مجموعهٔ A و B که با نماد $A\cap B$ نموده می‌شود، مجموعه‌ای است از همهٔ عضوهایی که متعلق به A و متعلق به B باشند.

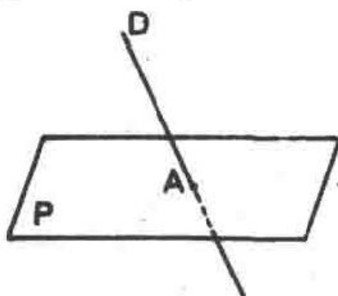
«$A\cap B$» را می‌خوانیم «اشتراک A و B»

در هندسه ، هرگاه خط و صفحه مجموعهٔ نقاط فرض شوند ، اشتراک دوخط ، اشتراک خط و صفحه واشتراک دوصفحه را به‌ترتیب می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :



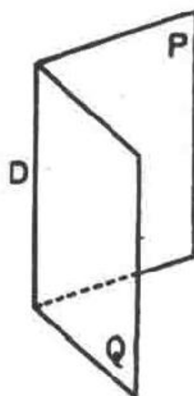
$D\cap D' = \{A\}$

(A نقطه است)



$P\cap D=\{A\}$

(A نقطه است)



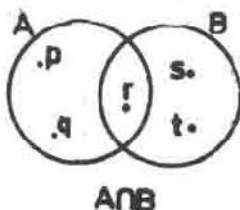
$P\cap Q=D$

روشن است که اگر A و B دومجموعهٔ جدا از هم باشند ، اشتراک آنها تهی خواهد بود .

$$A\cap B=\varnothing$$

مثال ۱ ـ دو مجموعـهٔ $A=\{p ، q ، r\}$ و $B=\{r ، s ، t\}$ را در نظر بگیرید ، آنگاه مجموعهٔ $A\cap B$ را بنویسید .

حل :



$A=\{p ، q ، r\}$

$B=\{r ، s ، t\}$

$A\cap B=\{p ، q ، r\}\cap\{r ، s ، t\}$

$=\{r\}$

مثال ۲ – برای دو مجموعهٔ $\{... ، ۵ ، ۳ ، ۱\}=A$ و $\{... ، ۶ ، ۴ ، ۲\}=B$ مجموعهٔ $A\cap B$ را بنویسید .

حل :

$A=\{۱ ، ۳ ، ۵ ، ...\}$

$B=\{۲ ، ۴ ، ۶ ، ...\}$

$A\cap B=\{۱ ، ۳ ، ۵ ، ...\}\cap\{۲ ، ۴ ، ۶ ، ...\}$

$=\varnothing$

مثال ۳ – مجموعهٔ $A=\{a ، b ، c ، d\}$ از مجموعهٔ مرجع $M=\{a ، b ، c ، d ، e\}$ را در نظر بگیرید ، آن‌گاه مجموعه‌های زیررا بنویسید :

$A\cap A ، \varnothing\cap A ، A\cap A' ، A\cap M$

حل :

$A=\{a ، b ، c ، d\}$

$A\cap A=\{a ، b ، c ، d\}\cap\{a ، b ، c ، d\}$

$=\{a ، b ، c ، d\}$

$\varnothing\cap A=\{\ \ \}\cap\{a ، b ، c ، d\}$

$=\{\ \ \}$

$M=\{a ، b ، c ، d ، e\}$

$A'=\{\not a ، \not b ، \not c ، \not d ، e\}$

$=\{e\}$

$A\cap A'=\{a ، b ، c ، d\}\cap\{e\}$

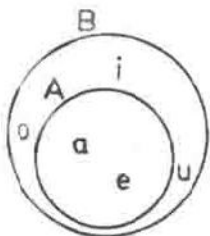
$A\cap A'=\{\ \ \}$

$A\cap M=\{a ، b ، c ، d\}\cap\{a ، b ، c ، d ، e\}$

$=\{a ، b ، c ، d\}$

از این مثال چه نتایجی می‌توان گرفت ؟

مثال ۴ ـ مجموعه‌های $A=\{a ، e\}$ و $B=\{a ، e ، i ، o ، u\}$ را درنظر بگیرید ، سپس مجموعهٔ $A\cap B$ را بنویسید .



حل :

$$A=\{a ، e\}$$
$$B=\{a ، e ، i ، o ، u\}$$
$$\{a ، e\}\subset\{a ، e ، i ، o ، u\}$$
$$A\cap B=\{a ، e\}\cap\{a ، e ، i ، o ، u\}$$
$$=\{a ، e\}$$

از مثال ۴ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت ؟

تعریف $A\cap B$ با علائم ریاضی

مجموعهٔ $A\cap B$ را با علائم ریاضی به‌صورت زیر تعریف می‌کنند :

$$A\cap B=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}$$

و می‌خوانند «$A\cap B$ ، مجموعه‌ای است با عضوهای x به قسمی که x متعلق به A و x متعلق به B است .»

به‌عبارت دیگر :

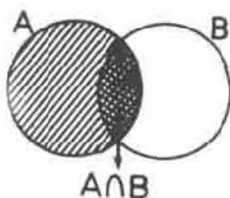
الف ـ از $x\in A\cap B$ ، نتیجه می‌شود $x\in A$

یعنی : $x\in A\cap B \Longrightarrow x\in A$.

ب ـ از $x\in A\cap B$ ، نتیجه می‌شود $x\in B$

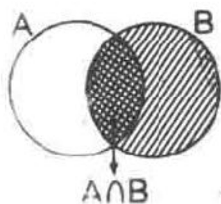
یعنی : $x\in A\cap B \Longrightarrow x\in B$.

با توجه به‌تعریف زیرمجموعه از الف نتیجه می‌شود که برای هردومجموعهٔ دلخواه A و B :



$$A\cap B\subset A$$

از ب نیز نتیجه می‌شود :



$$A\cap B\subset B$$

یعنی ، $A\cap B$ زیرمجموعهٔ هرکدام از مجموعه‌های A و B است .

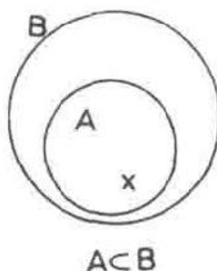
به قضیه زیر توجه کنید :

قضیهـ هرگاه A زیرمجموعهٔ B باشد، آن گاه اشتراك دومجموعه A و B مساوی A خواهد بود. به‌عبارت دیگر برای هر دو مجموعهٔ A و B از $A \subset B$ نتیجه می‌شود که $A \cap B = A$ یا بزبان ریاضی :

$$(A \subset B) \Longrightarrow (A \cap B = A)$$

برای نشان دادن درستی مطلب فوق فرض کنیم

$$x \in A$$



$A \subset B$

داریم : $A \subset B \Longleftrightarrow (x \in A \Longrightarrow x \in B)$

$$\therefore \quad (x \in A \wedge x \in B) \Longrightarrow x \in A \cap B$$

یعنی

$$x \in A \Longrightarrow x \in A \cap B$$

پس :

$$A \subset A \cap B \qquad (۱)$$

در صفحهٔ قبل نیز دیدید که

$$A \cap B \subset A \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$A \cap B = A$$



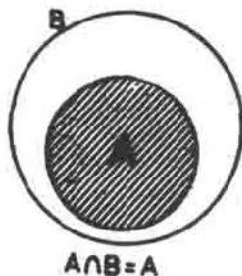
$A \cap B = A$

عکس قضیه فوق :

قضیهـ هرگاه اشتراك دومجموعهٔ A و B مساوی A باشد، آن‌گاه A زیرمجموعهٔ B است. به‌عبارت‌دیگر، برای هردو مجموعهٔ A و B از $A \cap B = A$ نتیجه می‌شود که $A \subset B$ یا بزبان ریاضی :

$$A \cap B = A \Longrightarrow A \subset B$$

درصفحات قبل دیدید که



$$A \cap B \subset B \qquad (۱)$$

دراینجا نیز بنا بر فرض‌داریم: $A \cap B = A$. پس‌اگر در (۱) به‌جای مجموعهٔ $A \cap B$ ، مجموعهٔ مساوی آن A را قرار دهیم ، نتیجه می‌شود

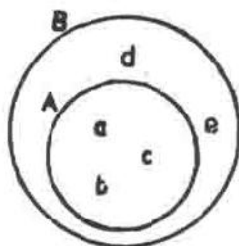
$$A \subset B$$

دوقضیه بالا را می‌توان با زبان ریاضی چنین نوشت :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$$

مثال ۱ــ دومجموعهٔ $A = \{a ، b ، c\}$ و $B = \{a ، b ، c ، d ، e\}$ را در نظر بگیرید ، آن‌گاه نشان دهید که: $A \cap B = A$

حل :



$A = \{a ، b ، c\}$

$B = \{a ، b ، c ، d ، e\}$

$\{a ، b ، c\} \subset \{a ، b ، c ، d ، e\}$

$A \cap B = \{a ، b ، c\} \cap \{a ، b ، c ، d ، e\}$

$= \{a ، b ، c\}$

$= A$

مثال ۲ــ مجموعهٔ $A = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\}$ ازمجموعهٔ مرجع $M = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}$ را در نظر بگیرید ، آن‌گاه نشان دهیدکه :

$A \cap A = A$ ؛ $\varnothing \cap A = \varnothing$ ؛ $A \cap A' = \varnothing$ ؛ $A \cap M = A$

حل :

$A = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\}$

$A \cap A = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\} \cap \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\}$

$= \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\}$

$= A$

$\varnothing \cap A = \{\ \} \cap \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\}$

$= \{\ \}$

$= \varnothing$

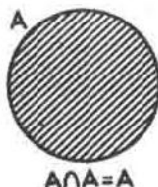
$$M=\{۱، ۲، ۳، ۴، ۵\}$$
$$A'=\{\not{۱}، \not{۲}، \not{۳}، \not{۴}، ۵\}$$
$$A'=\{۵\}$$
$$A\cap A'=\{۱، ۲، ۳، ۴\}\cap\{۵\}$$
$$=\varnothing$$

$$A\cap M=\{۱، ۲، ۳، ۴\}\cap\{۱، ۲، ۳، ۴، ۵\}$$
$$=\{۱، ۲، ۳، ۴\}$$
$$=A$$

چند نکتهٔ مهم

-۱

> اشتراك هرمجموعه با خودش مساوی خود مجموعه است. به‌عبارت دیگر، هرگاه A مجموعهٔ دلخواهی باشد داریم $A\cap A=A$.



A∩A=A

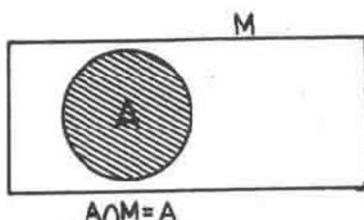
چون $A\subset A$، لذا طبق آنچه دیده‌اید خواهیم داشت :

$$A\cap A=A$$

-۲

> اشتراك هرمجموعه با مجموعهٔ مرجع، مساوی خود آن مجموعه است. به‌عبارت دیگر، هرگاه A مجموعهٔ دلخواهی باشد داریم $A\cap M=A$.

چون $A\subset M$، لذا داریم :



A∩M=A

$$A\cap M=A$$

-۳

> اشتراك مجموعهٔ تهی با هرمجموعه، مساوی مجموعهٔ تهی است . به عبارت دیگر ، هرگاه A مجموعهٔ دلخواهی باشد داریم $\varnothing \cap A = \varnothing$.

چون $\varnothing \subset A$ ، لذا $\varnothing \cap A = \varnothing$ خواهد شد .

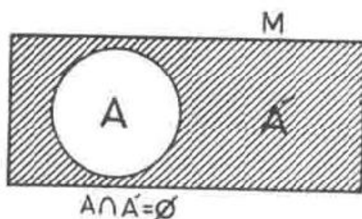
-۴

> اشتراك هر مجموعه با مجموعهٔ متممش ، مساوی مجموعهٔ تهی است . به عبارت دیگر ، هرگاه A مجموعهٔ دلخواهی باشد داریم $A \cap A' = \varnothing$.

روشن است کـه A و 'A هیچ عضو مشترکی ندارند . به‌عبارت دیگر، A و 'A دو مجموعهٔ جدا از هم می‌باشند . پس :

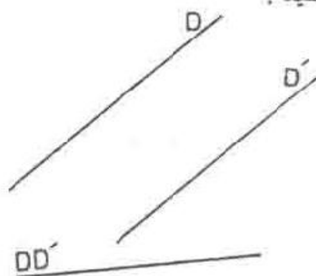
$$A \cap A' = \varnothing$$

هرگاه $A \cap B = \varnothing$ ، آیـا B متمم A است ؟



مثال ۱ – هرگاه خط و صفحه مجموعهٔ نقاط و دو خط D و 'D در صفحه فرض شوند ، با استفاده ازمجموعه‌ها ، شرط توازی برای D و 'D را بنویسید .

حل :



دو خط D و 'D متوازیند هرگاه

$D \cap D' = \varnothing$ یا $D \cap D' = D = D'$

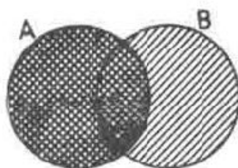
درصورتی که این دوخط متمایز باشند رابطهٔ $D \cap D' = \varnothing$ برای بیان توازی آنها کافی می‌باشد .

مثال ۲- هرگاه A و B دومجموعهٔ دلخواه باشند ، **نشان دهید که** :

الف - $A\cap(A\cup B)=A$

ب - $(A\cap B)\cup A=A$

حل : دیدید که « از $A\subset B$ نتیجه می‌شود $A\cup B=B$ و $A\cap B=A$ » با توجه به این مطالب اکنون درستی الف و ب را نشان می‌دهیم :

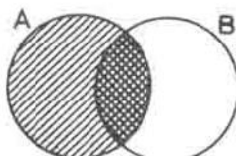


الف - **دیدید که**

$A\subset A\cup B$

پس طبق مقدمه نتیجه می‌شود

$A\cap(A\cup B)=A$



ب - باز می‌دانید که

$A\cap B\subset A$

پس طبق مقدمه نتیجه می‌شود

$(A\cap B)\cup A=A$

مثال ۳ - درستی تساوی زیر را نشان دهید :

$$A\cap(A\cup A')=A$$

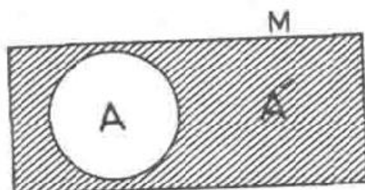
حل : طرف چپ تساوی را ساده می‌کنیم تا طرف راست به‌دست آید :

$A\cap(A\cup A')=A\cap M$ چرا ؟

$=A$ چرا ؟

تذکر ۱ - دو مجموعهٔ A و A' دارای سه خاصیت زیر می‌باشند :

الف - در حالت کلی A و A' تهی نیستند .



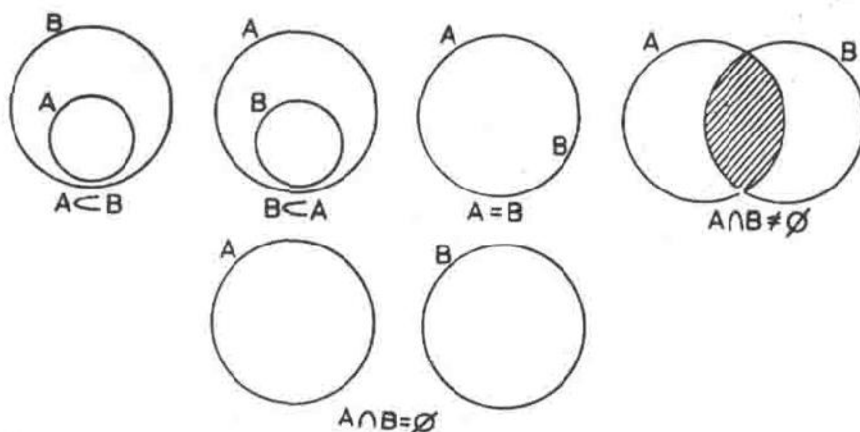
ب - A و A' دو مجموعهٔ جدا از هم می‌باشند .

$A\cap A'=\varnothing$

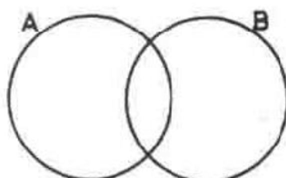
ج - از اجتماع A و A' مجموعهٔ M به‌دست می‌آید:

$A\cup A'=M$

تذکر ۲ ــ هرگاه وضع دو مجموعهٔ A و B نسبت به‌هم از اول روشن باشد، برای نمایش هندسی آنها از یکی از شکلهای زیر استفاده می‌کنیم :



اما گاهی اوقات ممکن است در شروع حل مسئله‌ای وضع دو مجموعه نسبت به‌هم روشن نباشد. در این صورت می‌توان آنها را به‌صورت زیرنمایش داد :



و بعداز حل مسئله موقعی که معلوم شد این دو مجموعه نسبت به‌هم چه وضعی دارند. آن‌گاه شکل را به‌یکی ازصورتهای فوق تصحیح‌کرد

تذکر ۳ ــ در حساب و جبر دیده‌اید که برای سه عدد a و b و c از تساویهای :

$$a+b=a+c$$

$$a\times b=a\times c \text{ ، } a\neq 0$$

نتیجه می‌شود که

$$b=c$$

حال ببینیم این مطلب در مجموعه‌ها و در مورد اعمال $\cup$ و $\cap$ چگونه است .

مثال ۴ ــ سه‌مجموعهٔ $A=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}$ ، $B=\{۱ ، ۲ ، ۶ ، ۷\}$ و $C=\{۳ ، ۵ ، ۶ ، ۷\}$ را در نظرگرفته نشان دهید که در مورد این سه مجموعه

$$A\cup B=A\cup C$$

حل : مجموعه‌های طرفین این تساوی را حساب می‌کنیم :

$$A\cup B=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}\cup\{۱ ، ۲ ، ۶ ، ۷\}$$

$$A\cup B=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷\}$$

$$A\cup C=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}\cup\{۳ ، ۵ ، ۶ ، ۷\}$$

$$=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷\}$$

دیده می‌شود که دو مجموعهٔ $A\cup B$ و $A\cup C$ مساویند :

$$A\cup B=A\cup C$$

در حالی که دو مجموعهٔ

$$B=\{۱ ، ۲ ، ۶ ، ۷\}$$

$$C=\{۳ ، ۵ ، ۶ ، ۷\}$$

مساوی نیستند :

$$B\neq C$$

در ریاضیات وقتی یك دستور حتی برای یك مثال درست نباشد از این دستور نمی‌توان استفاده نمود . پس در حالت کلی از تساوی

$$A\cup B=A\cup C$$

نتیجه نمی‌شود که

$$B=C$$

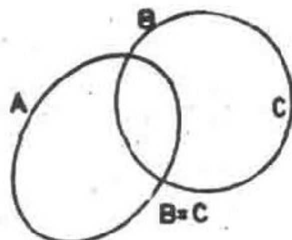
این مطلب در مورد اشتراك دو مجموعه نیز صادق است یعنی از تساوی :

$$A\cap B=A\cap C$$

نتیجه نمی‌شود که

$$B=C$$

درمجموعه‌ها از طرفین یك تساوی‌که شامل اعمال $\cup$ و $\cap$ باشد ، دو مجموعهٔ مساوی را نمی‌توان حذف کرد .



اما عکس مطلب درست است . یعنی از تساوی

$$B=C$$

نتیجه می‌شود که

$$A\cup B=A\cup C$$

$$A\cap B=A\cap C$$

زیرا ، B و C در حقیقت یك مجموعه هستند نه دو مجموعهٔ متفاوت .

تمرین

۱ ــ در تمرینهای زیر به‌جای ؟ عضو مناسب بگذارید :

الف ــ $\{a ، b\} \cap \{a ، c\} = \{?\}$

ب ــ $\{a ، ? ، b ، c\} \cap \{d ، e ، ? ، f\} = \{b ، d\}$

۲ ــ سه مجموعهٔ $\{x \mid x \in N ، x < ۲۰\}$ = A ، $\{x \mid x \in N ، x < ۱۲\}$ = B و $\{x \mid x \in N$ یک رقمی است $x\}$ = C را در نظر بگیرید ، آن گاه مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی بنویسید :

$$A \cap B ، A \cap C ، B \cap C$$

۳ ــ هر گاه خط وصفحه مجموعهٔ نقاط فرض شوند ، با استفاده ازمجموعه‌ها ،گزاره‌های زیر را بیان کنید :

الف ــ خط D و صفحهٔ P موازیند .

ب ــ خط D و صفحهٔ P متقاطعند .

ج ــ خط D داخل صفحهٔ P واقع است .

۴ ــ هر گاه خط وصفحه مجموعهٔ نقاط فرض شوند ، با استفاده ازمجموعه‌ها ،گزاره‌های زیر را بیان کنید :

الف ــ دو صفحهٔ P و P' متوازی هستند .

ب ــ دو صفحهٔ P و P' دارای فصل مشترک D هستند .

ج ــ دو صفحهٔ P و P' برهم منطبق هستند .

۵ ــ هرگاه P ، N ، Z ، Q و R به‌ترتیب نمایش مجموعه‌های اعداد اول ، اعداد طبیعی ، اعداد درست، اعداد گویا و اعداد حقیقی باشند، کدام‌یك از گزاره‌های زیر درست است:

$-۲ \in N$ ؛ $\pi \in R$ ؛ $P \subset N$ ؛ $\sqrt{(-۲)^۲} \in N$ ؛ $P \subset Z$ ؛

$Z \cap R = Z$ ؛ $Q \cup R = R$ ؛ $N \cap Z = N$ ؛ $P \cap N = N$

۶ ــ مجموعه‌های $A = \{p ، q ، r\}$ و $B = \{p ، r ، t\}$ را درنظر گرفته سپس مجموعه‌های: $A \cap B$ و $B \cap A$ را بنویسید .

از این تمرین چه نتیجه‌ای را می‌توان حدس زد ؟

۷ ــ با استفاده‌ازمجموعه‌های $A = \{a ، b ، c\}$ و $B = \{b ، d ، e\}$ و $C = \{b ، c ، e\}$ ، مجموعه‌های زیررا بنویسید : $A \cap (B \cap C)$ ، $(A \cap B) \cap C$

ازاین تمرین چه نتیجه‌ای می‌توان‌گرفت ؟

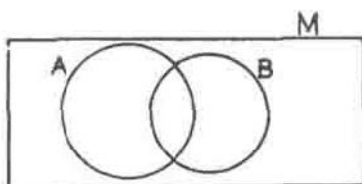
۸ ــ مجموعه‌های $A = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\}$ و $B = \{۳ ، ۴ ، ۵\}$ و $C = \{۲ ، ۳ ، ۷\}$ را

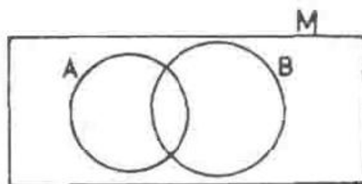
در نظر بگیرید ، سپس مجموعه‌های زیر را بنویسید و درهرحالت نتیجه‌ها را با هم مقایسه‌کنید.

الف ـ $A\cap (B\cup C)$ و $(A\cap B)\cup (A\cap C)$

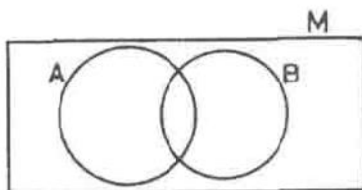
ب ـ $A\cup (B\cap C)$ و $(A\cup B)\cap (A\cup C)$

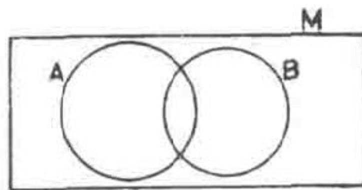
۹ ـ در شکلهای زیر ، مجموعه‌های $(A'\cap B')$ و $(A\cup B)'$ را جداگانه سایه زده ، با مقایسهٔ آنها با یکدیگر نتیجهٔ حاصل را بیان کنید :





۱۰ ـ در شکلهای زیر ، مجموعه‌های $(A'\cup B')$ و $(A\cap B)'$ را جداگانه سایه زده ، با مقایسهٔ آنها با یکدیگر نتیجهٔ حاصل را بیان کنید :





۱۱ ـ با استفاده از مجموعه‌های $A=\{a ، b ، c\}$ ، $B=\{c ، d ، e\}$ و $M=\{a ، b ، c ، d ، e ، f\}$ ، نشان دهید که :

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$

۱۲ ـ با استفاده از نمودار ون و سایه زدن نشان دهید که هرگاه $A\subset B$ ، آن‌گاه :

$$A\cap B'=\varnothing$$

۱۳ ـ هرگاه A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند با استفاده از نمودار ون و سایه‌زدن نشان دهید که :

$$A\cap B'=A$$

۱۴ ـ درگزاره‌های زیر به‌جای ؟ مجموعه یا مجموعه‌های مناسب بگذارید :

$D\cap ?=\varnothing$ ؛ $F\cap ?=F$ ؛ $E\cap E=?$ ؛ $F\cap M=?$ ؛ $C\cap ?\subset D$

۱۵ ـ آیا برای هردو مجموعهٔ A و B می‌توان نوشت : $A\cap B\subset A\cup B$ ؟

۱۶ ـ هرگاه $A\cap B=M$ ، ثابت‌کنید که $A=M$ و $B=M$ (M مرجع است).

۱۷ – ثابت کنید که برای هرسه مجموعهٔ دلخواه A ، B و C ، از

$$A \subset B$$

نتیجه می‌شود

$$A \cup C \subset B \cup C$$

و

$$A \cap C \subset B \cap C$$

۱۸ – ثابت کنید که برای هرسه مجموعهٔ دلخواه A ،B و C ، از

$$A \subset C$$

و

$$B \subset C$$

نتیجه می‌شود

$$A \cup B \subset C$$

و

$$A \cap B \subset C$$

۱۹ – ثابت کنید که برای هرسه مجموعهٔ دلخواه A ، B و C ، از

$$A \subset C$$

و

$$A \subset B$$

نتیجه می‌شود

$$A \subset B \cup C$$

و

$$A \subset B \cap C$$

۲۰ – ثابت کنید که برای هرچهار مجموعهٔ دلخواه A ، B ، C و D ، از

$$A = B$$

و

$$C = D$$

نتیجه می‌شود

$$A \cup C = B \cup D$$

و

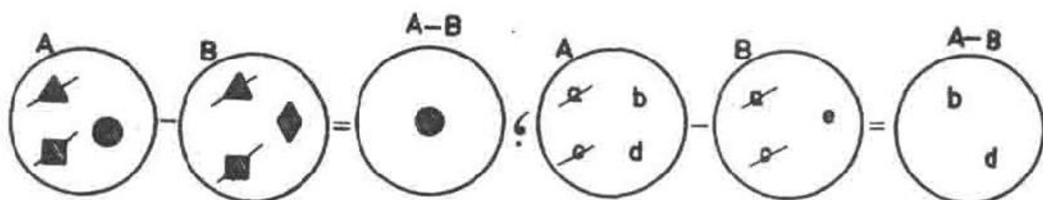
$$A \cap C = B \cap D$$

تفاضل دو مجموعه

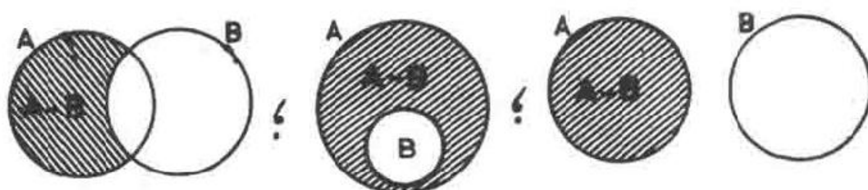
اگر دومجموعهٔ A و B داده شده باشند ، مجموعه عضوهایی از A که در B نباشند ، مجموعهٔ تفاضل A – B را تشکیل می‌دهند .

تعریف – تفاضل دومجموعه A و B که با نماد A – B نموده می‌شود ، مجموعهٔ همهٔ آن عضوهایی از A است که در B نباشد .

در شکلهای زیر تفاضل $A - B$ نشان داده شده است :



همچنین در شکلهای زیر تفاضل $A - B$ با هاشور مشخص شده است :



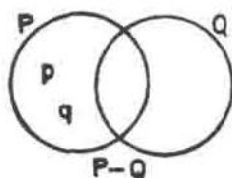
به‌همین ترتیب ، مجموعهٔ $B - A$ ، مجموعهٔ همهٔ آن عضوهایی از B است که در A نباشند.

اگر $B \subset A$ در این صورت $A - B$ ، متمم مجموعهٔ B نسبت به A خوانده می‌شود .

طبق آنچه‌گفته شد ، آیا می‌توان نوشت : $A' = M - A$ ؟

مثال ۱ ــ دو مجموعهٔ $P = \{p ، q ، r ، s\}$ و $Q = \{r ، s ، t ، u\}$ را در نظر بگیرید ، آن‌گاه مجموعه‌های $P - Q$ و $Q - P$ را بنویسید .

حل :

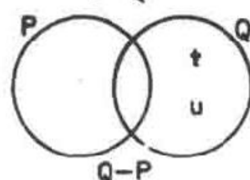


$$P = \{p ، q ، r ، s\}$$

$$Q = \{r ، s ، t ، u\}$$

$$P - Q = \{p ، q ، \not{r} ، \not{s}\}$$

$$= \{p ، q\}$$

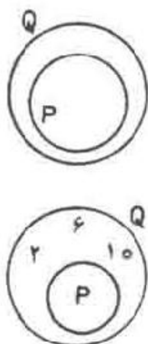


$$Q - P = \{\not{r} ، \not{s} ، t ، u\}$$

$$= \{t ، u\}$$

آیا $P - Q$ زیرمجموعهٔ P است ؟ $Q - P$ زیرمجموعهٔ چه مجموعه‌ای است ؟

مثال ۲ ــ مجموعه‌های $P = \{۴ ، ۸ ، ۱۲\}$ و $Q = \{۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ، ۱۰ ، ۱۲\}$ را در نظر بگیرید ، آن‌گاه مجموعه‌های $P - Q$ و $Q - P$ را بنویسید .



حل :

$$P=\{۴ ، ۸ ، ۱۲\}$$

$$Q=\{۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ، ۱۰ ، ۱۲\}$$

$$P-Q=\{\cancel{۴} ، \cancel{۸} ، \cancel{۱۲}\}$$

$$=\varnothing$$

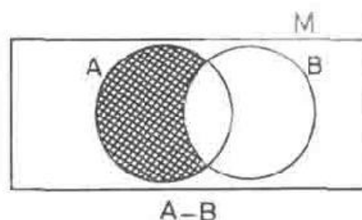
$$Q-P=\{۲ ، \cancel{۴} ، ۶ ، \cancel{۸} ، ۱۰ ، \cancel{۱۲}\}$$

$$=\{۲ ، ۶ ، ۱۰\}$$

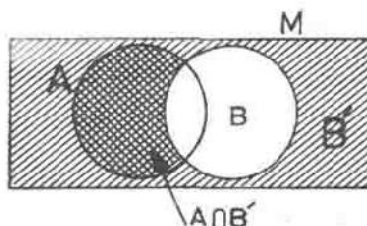
از این مثال چه نتیجه میتوان گرفت ؟

مثال ۳ ـ هرگاه A و B دومجموعهٔ دلخواه و M مجموعهٔ مرجع باشد، با استفاده ازنمودار ون و سایه زدن دو مجموعهٔ $A-B$ و $A\cap B'$ را نمایش دهید.

حل :



A−B



A∩B'

از مثال ۳ چه نتیجه‌ای را می‌توان حدس زد ؟

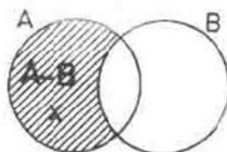
تعریف تفاضل دومجموعه با استفاده از زبان ریاضی

مجموعهٔ $A-B$ را با استفاده از زبان ریاضی به‌صورت زیر تعریف می‌کنند :

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ و } x\notin B\}$$

ومی‌خوانند «$A-B$ ، مجموعه‌ای است با عضوهای x به قسمی که x متعلق به A است و x متعلق به B نیست»

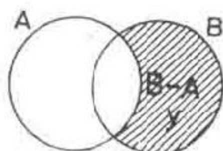
روشن است که از $x\in A-B$ نتیجه می‌شود $x\in A$. یعنی :



$$A-B\subset A$$

و این از روی شکل نیز دیده می‌شود .

همچنین :

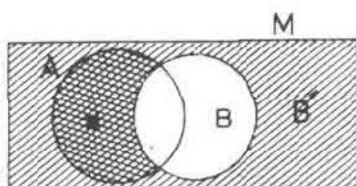


$$B - A \subset B$$

به مطلب زیر توجه کنید :

هرگاه A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، مجموعهٔ $A-B$ مساوی است با اشتراک دو مجموعهٔ A و B' به عبارت دیگر : $A-B=A\cap B'$.

دیدید که :



$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ و } x\notin B\}$$

یعنی $A-B$ ، مجموعه‌ای است با عضوهای x به قسمی که x متعلق به A است و x متعلق به B نیست. اما اگر x متعلق به B نباشد $(x\notin B)$ ، آن‌گاه بنابر تعریف مجموعهٔ متمم، x متعلق به B' خواهد بود $(x\in B')$ به‌عبارت دیگر :

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ و } x\in B'\}$$

و این درست تعریف اشتراک دو مجموعهٔ A و B' است یعنی :

$$A-B=A\cap B'$$

مثال ۱ – هرگاه A مجموعهٔ دلخواهی باشد، نشان دهید که :

الف – $A-A=\varnothing$ ب – $A-\varnothing=A$

حل : طبق آنچه در فوق گفته شد، می‌توان نوشت :

الف – $A-A=A\cap A'$

$=\varnothing$ چرا ؟

ب – $A-\varnothing=A\cap\varnothing'$

$=A\cap M$ چرا ؟

$=A$ چرا ؟

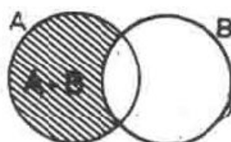
نتایج فوق را مستقیماً از روی تعریف تفاضل دو مجموعه بیان کنید.

مثال ۲ – هرگاه A مجموعهٔ دلخواهی باشد، نشان دهید که :

الف – $\varnothing-A=\varnothing$ ب – $M-A=A'$

حل : الف ـ بنابر تعریف تفاضل دو مجموعه ، $\varnothing - A$ ، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در $\varnothing$ بوده و در A نباشند و چون در $\varnothing$ عضوی وجود ندارد پس $\varnothing - A = \varnothing$.

ب ـ باز بنابر تعریف تفاضل دو مجموعه ، $M - A$ ، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در M بوده و در A نباشند و این همان تعریف A' است[1]. پس $M - A = A'$



مثال ۳ ـ درستی تساوی زیر را نشان دهید :

$$(A - B) \cup A = A$$

حل : دیدید که

$$A - B \subset A$$

قبلا نیز گفتیم از $X \subset A$ نتیجه می‌شود $X \cup A = A$. پس

$$(A - B) \cup A = A$$

مثال ۴ ـ نشان دهید که $A - A' = A$.

حل :

$A - A' = A \cap (A')'$	چرا ؟
$= A \cap A$	چرا ؟
$= A$	چرا ؟

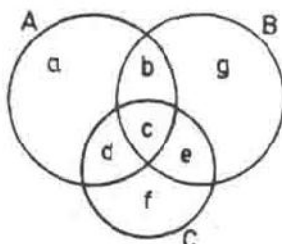
تمرین

۱ـ در تمرینهای زیر به‌جای ؟ عضو مناسب بگذارید :

$\{a , b\} - \{a , c\} = \{ ? \}$

$\{a , ? , b , c\} - \{a , d , ?\} = \{b\}$

$\{a , e , i\} - \{? , a\} = \{ i \}$



۲ ـ با استفاده از این شکل ، مجموعه‌های $A - B$ ، $A - C$ ، $B - C$ ، $B - A$ ، $C - A$ و $C - B$ را بنویسید .

۱ـ بعضی از کتب مجموعهٔ متمم را به‌صورت $A' = M - A$ ، تعریف کرده‌اند .

۳ – برای دو مجموعهٔ $A=\{۱ ، ۲ ، ۳\}$ و $B=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}$ ، مجموعهٔ $A-B$ را نوشته نتیجهٔ حاصل را بیان کنید.

۴ – مجموعه‌های $A=\{a ، b ، c ، d\}$ ، $B=\{a ، b ، e ، f\}$ و $C=\{a ، e ، g\}$ را در نظر گرفته ، سپس درستی تساویهای زیر را نشان دهید :

الف – $A-(A\cap B)=A-B$

ب – $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

ج – $[(A-B)\cup(B-A)]\cup(A\cap B)=A\cup B$

۵ – دو مجموعهٔ $A=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}$ و $B=\{۱ ، ۲ ، ۶ ، ۷\}$ از مجموعهٔ $M=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، \ldots ، ۹\}$ را درنظر گرفته ، سپس درستی تساویهای زیر را نشان دهید :

الف – $A-B=B'-A'$ ب – $A-B=A\cap B'$

ج – $(A-B)\cap B=\varnothing$ د – $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

۶ – درستی تساویهای تمرینهای ۴ و ۵ را با استفاده ازنمودار ون وسایه‌زدن نشان دهید .

۷ – هرگاه A و B دو مجموعه و $A\subset B$ باشد ، ثابت کنید که

$$A-B=\varnothing$$

۸ – ثابت کنید :

الف – $(B-A)\cup B=B$ ب – $(A-B')\cup A=A$

ج – $(A\cup A')\cap(A\cap B')=A-B$

د – $(A\cap A')\cup(A-B')=A\cap B$

هـ – $A\cap[(B\cap A')\cup B]=A\cap B$

۳ فصل

مطالبی بیشتر دربارهٔ مجموعه‌ها

خاصیت جابجایی

در دورهٔ راهنمایی دیدید که اگر a و b دوعدد دلخواه باشند داریم :

$$a+b=b+a$$
$$a\times b=b\times a$$

این خاصیت به نام خاصیت جابجایی جمع و ضرب در مجموعهٔ اعداد خوانده می‌شود. در زیر خاصیت جابجایی اجتماع و اشتراک در مجموعه‌ها را می‌بینید.

ازتعریف اجتماع و اشتراک دومجموعه مستقیماً نتیجه می‌شود که برای هر دومجموعهٔ A و B داریم :

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$

برای هر دو مجموعهٔ A و B ، اجتماع A با B مساوی است با اجتماع B با A همچنین اشتراک A با B مساوی است با اشتراک B با A .

مثال ــ دو مجموعهٔ $A=\{۲ ، ۴ ، ۶\}$ و $B=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}$ را درنظرگرفته نشان دهید که :

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$

حل : مجموعه‌های طرفین این تساویها را می‌نویسیم :

$$A\cup B=\{۲ ، ۴ ، ۶\}\cup\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}$$
$$=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶\}$$

$$B\cup A=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}\cup\{۲ ، ۴ ، ۶\}$$
$$=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶\}$$

دیده می‌شود که این دو مجموعه مساوی هستند . همچنین در زیر تساوی $A \cap B$ و $B \cap A$ نشان داده شده است :

$$A \cap B = \{۲ ، ۴ ، ۶\} \cap \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\}$$
$$A \cap B = \{۲ ، ۴\}$$

$$B \cap A = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵\} \cap \{۲ ، ۴ ، ۶\}$$
$$= \{۲ ، ۴\}$$

تذکر ـ با استفاده ازخاصیت جابجایی $\cup$ و $\cap$ ، می‌توان قوانین مجموعه‌ها را که تا کنون خوانده‌اید به‌صورتهای زیر نوشت :

$$A \cup M = M \cup A = M$$
$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$$
$$A \cap M = M \cap A = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$$
$$A \cup A' = A' \cup A = M$$
$$(A \cap B) \cup A = A \cup (A \cap B) = A$$
$$(A \cup B) \cap A = A \cap (A \cup B) = A$$

خاصیت شرکت‌پذیری (انجمنی)

در دورهٔ راهنمایی دیدید که هرگاه a و b و c سه عدد دلخواه باشند داریم:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

این خاصیت به نام خاصیت شرکت‌پذیری جمع و ضرب در مجموعهٔ اعداد خوانده می‌شود در زیر نیز خاصیت شرکت‌پذیری اجتماع و اشتراک را در مجموعه‌ها می‌بینید:

برای هرسه مجموعهٔ دلخواه A و B و C داریم :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

قبل‌از آن‌که رابطه‌های فوق را به روش ریاضی اثبات‌کنیم درستی‌آنها را بەوسیلهٔ یك‌مثال و همچنین با استفاده از نمودار ون تحقیق می‌کنیم.

تحقیق درستی خاصیت شرکت‌پذیری با استفاده از یك مثال

مثال ــ مجموعه‌های $A = \{a, b, e\}$ و $B = \{a, d, e\}$ و $C = \{a, b, e, f\}$ را در نظر گرفته نشان دهید که :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (۱)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (۲)$$

حل : مجموعه‌های طرفین این تساویها را حساب می‌کنیم :

$$A \cup B = \{a, b, c\} \cup \{a, d, e\}$$
$$= \{a, b, c, d, e\}$$

$$B \cup C = \{a, d, e\} \cup \{a, b, e, f\}$$
$$= \{a, b, d, e, f\}$$

$$A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{a, d, e\}$$
$$= \{a\}$$

$$B \cap C = \{a, d, e\} \cap \{a, b, e, f\}$$
$$= \{a, e\}$$

(۱) مجموعهٔ طرف چپ تساوی $= A \cup (B \cup C)$

$$= \{a, b, c\} \cup \{a, b, d, e, f\}$$
$$= \{a, b, c, d, e, f\}$$

(۱) مجموعهٔ طرف راست تساوی $= (A \cup B) \cup C$

$$= \{a, b, c, d, e\} \cup \{a, b, e, f\}$$
$$= \{a, b, c, d, e, f\}$$

دیده می‌شود که این دو مجموعه مساوی هستند. همچنین در زیر تساوی دو مجموعهٔ $A \cap (B \cap C)$ و $(A \cap B) \cap C$ نشان داده شده است :

(۲) مجموعهٔ طرف چپ تساوی $= A \cap (B \cap C)$

$$= \{a, b, c\} \cap \{a, e\}$$
$$= \{a\}$$

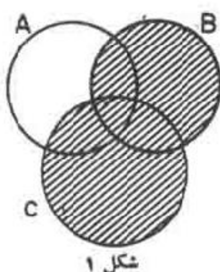
(۲) مجموعهٔ طرف راست تساوی $= (A \cap B) \cap C$

$$= \{a\} \cap \{a, b, e, f\}$$
$$= \{a\}$$

تحقیق درستی خاصیت شرکت‌پذیری با استفاده از نمودار ون

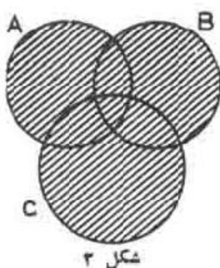
ابتدا درستی تساوی زیر را تحقیق می‌کنیم

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$



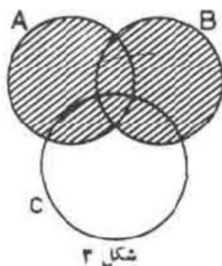
شکل ۱

در شکل ۱ ، مجموعهٔ $B\cup C$ با سایه مشخص شده است .



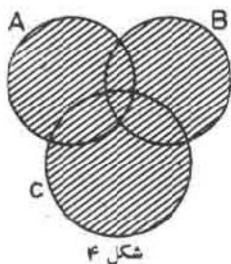
شکل ۲

درشکل ۲ ، مجموعهٔ $A\cup(B\cup C)$ با سایه نشان داده شده است



شکل ۳

درشکل ۳ ، مجموعهٔ $A\cup B$ با سایه نمایش داده شده است .



شکل ۴

درشکل ۴ ، مجموعهٔ $(A\cup B)\cup C$ با سایه مشخص شده است .

شکلهای ۲ و ۴ یك نـاحیه را مشخص ساخته‌اند ، یعنی مجموعه‌های $A\cup(B\cup C)$ و $(A\cup B)\cup C$ مساویند : $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

تمرین – با همین روش درستی تساوی $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ را تحقیق کنید .

اثبات درستی خاصیت شرکت‌پذیری

درستی خاصیت شرکت پذیری اجتماع و اشتراک را در مجموعه‌ها بـا مثال و نمودار نشان دادیم . اکنون درستی

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

را ثابت می‌کنیم .

اولا

$$x \in A \cup (B \cup C) \implies x \in A \vee x \in B \cup C$$

که دراین‌صورت یکی از دوحالت زیر پیش می‌آید :

الف ـ

$$x \in A \implies x \in A \cup B$$

ولی

$$x \in A \cup B \implies x \in (A \cup B) \cup C \qquad (۱)$$

ب ـ

$$x \in B \cup C \implies x \in B \vee x \in C$$

بدین ترتیب

$$x \in B \implies x \in A \cup B$$

$$x \in A \cup B \rightarrow x \in (A \cup B) \cup C \qquad (۲)$$

یا

$$x \in C \implies x \in (A \cup B) \cup C \qquad (۳)$$

باتوجه به (۱) و (۲) و (۳) دیده می‌شود که در هرحالت داریم :

$$x \in A \cup (B \cup C) \implies x \in (A \cup B) \cup C$$

پس .

$$A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C \qquad (۴)$$

ثانیاً

$$x \in (A \cup B) \cup C \implies x \in C \vee x \in A \cup B$$

که دراین صورت باز هم یکی از دوحالت زیرپیش می‌آید :

الف ـ

$$x \in C \implies x \in B \cup C$$

$$x \in C \implies x \in A \cup (B \cup C) \qquad (۵)$$

ب ـ

$$x \in A \cup B \implies x \in A \vee x \in B$$

و درنتیجه

$$x \in A \implies x \in A \cup (B \cup C) \qquad (۶)$$

یا

$$x \in B \Rightarrow x \in (B \cup C)$$

$$x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C) \qquad (۷)$$

با توجه به (۵) ، (۶) و (۷) دیده می‌شود که درهرصورت داریم :

$$x \in (A \cup B) \cup C \rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$$

یعنی :

$$(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C) \qquad (۸)$$

از مقایسهٔ (۴) و (۸) نتیجه می‌شود :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

تمرین ـ با استفاده از این روش ثابت کنید که :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

تذکر ـ با استفاده از آنچه دربالا گفته شد می‌نویسیم :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$

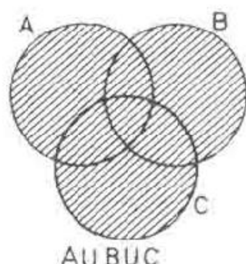
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$$

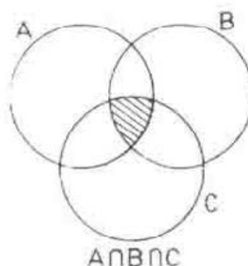
یعنی مجموعهٔ $(B \cup C) A \cup$ ، یـا $(A \cup B) \cup C$ را با $A \cup B \cup C$ و همچنین مجموعهٔ $A \cap (B \cap C)$ ، یا $A \cap (B \cap C)$ را با $A \cap B \cap C$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب می‌نویسیم:

$$A \cup [B \cup (C \cup D)] = (A \cup B) \cup (C \cup D) = A \cup B \cup C \cup D$$

$$A \cap [B \cap (C \cap D)] = (A \cap B) \cap (C \cap D) = A \cap B \cap C \cap D$$

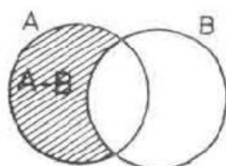
در شکلهای زیر اجتماع و اشتراک سه مجموعه با سایه مشخص شده است :





مثال ۱ـ نشان دهید :

$$(A - B) \cap B = \varnothing \qquad (۱)$$



حل : دیدید که $A - B = A \cap B'$ با توجه‌به‌این

مطلب ، طرف اول تساوی (۱) را می‌نویسیم :

$$(A-B)\cap B=(A\cap B')\cap B$$

شرکت‌پذیری : $=A\cap(B'\cap B)$

چرا ؟ $=A\cap\varnothing$

چرا ؟ $=\varnothing$

از روی شکل نیز دیده می‌شود که دومجموعه $A-B$ و B ، جدا از هم بوده . لذا اشتراك آنها مساوی مجموعهٔ تهی است .

مثال ۲- نشان دهید :

$$(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$$

حل : با توجه به «$A-B=A\cap B'$» می‌نویسیم :

$$(A-B)\cap(A\cap B)=(A\cap B')\cap(A\cap B)$$

تعویض‌پذیری : $=(A\cap B')\cap(B\cap A)$

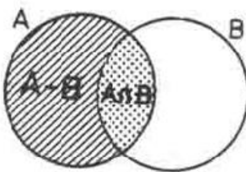
شرکت‌پذیری : $=[(A\cap B')\cap B]\cap A$

شرکت‌پذیری : $=[A\cap(B'\cap B)]\cap A$

چرا ؟ $=[A\cap\varnothing]\cap A$

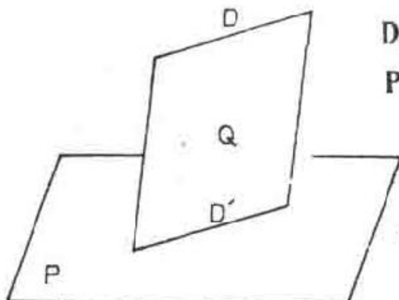
چرا ؟ $=\varnothing\cap A$

$=\varnothing$



از روی شکل نیز دیده می‌شود که دو مجموعهٔ $A-B$ و $A\cap B$ ، جدا ازهم بوده درنتیجه اشتراك آنها مساوی مجموعهٔ تهی است .

مثال ۳ ــ خط D موازی صفحهٔ P است . هرگاه صفحهٔ Q ازخط D بگذرد و P را درخط D' قطع کند ، نشان دهید که دو خط D و D' متوازی هستند . (خط و صفحه مجموعهٔ نقاط فرض شده‌اند) .



D موازی P است . $D\cap P=\varnothing$ (۱)

D' فصل مشترك دو صفحه است . $P\cap Q=D'$ (۲)

می‌خواهیم نشان دهیم : $D\parallel D'$

حل : دو خط متمایز D و D' درصفحهٔ Q هستند ، کافی است نشان دهیم که متوازی می‌باشند یعنی ،

$$D\cap D'=\varnothing$$

برای این منظور، درمجموعهٔ $D\cap D'$، به‌جای D' مجموعهٔ طرف‌چپ تساوی (۲) راقرارمی‌دهیم:

$$D\cap D'=D\cap(P\cap Q)$$

شرکت‌پذیری : $=(D\cap P)\cap Q$

تساوی (۱) بالا : $=\varnothing\cap Q$

چرا ؟ $=\varnothing$

دو خط متمایز D و D' در صفحهٔ Q بوده و اشتراك آنها مساوی **مجموعهٔ تهی** است . لذا ، متوازی هستند .

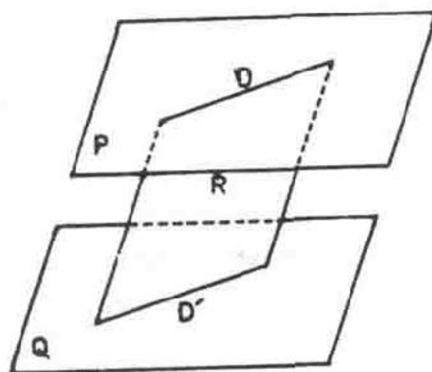
مثال ۴ ــ هرگاه دو صفحهٔ متوازی به وسیلهٔ صفحهٔ سومی قطع شود نشان دهید که فصل مشترکها متوازی هستند

P و Q متوازیند : $P\cap Q=\varnothing$ (۱)

D فصل مشترك P و R است . $P\cap R=D$ (۲)

D' فصل مشترك Q و R است . $Q\cap R=D'$ (۳)

می‌خواهیم نشان دهیم : $D \parallel D'$



حل : دوخط متمایز D و D' درصفحهٔ R هستند. کافی است نشان دهیم که متوازی می‌باشند . یعنی $D\cap D'=\varnothing$. برای این منظور ، در مجموعهٔ $D\cap D'$ ، به‌جای D و D' مجموعه‌های طرف چپ تساویهای (۲) و (۳) را قرار می‌دهیم :

$$D\cap D'=(P\cap R)\cap(Q\cap R)$$

جابجایی : $=(R\cap P)\cap(Q\cap R)$

شرکت‌پذیری : $=R\cap[P\cap(Q\cap R)]$

شرکت‌پذیری : $=R\cap[(P\cap Q)\cap R]$

تساوی (۱) بالا : $=R\cap[\varnothing\cap R]$

چرا؟ $=R\cap\varnothing$

$=\varnothing$

دو خط متمایز D و D' در صفحهٔ R بوده و اشتراك آنها مساوی مجموعهٔ تهی است . لذا ، متوازی هستند .

خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری)

در دورهٔ راهنمایی دیده‌اید که هرگاه a و b و c سه عدد دلخواه باشند داریم:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

یعنی در مجموعهٔ اعداد، عمل ضرب نسبت به جمع دارای خاصیت پخشی است ولی:

$$a + (b \times c) \neq (a + b) \times (a + c)$$

یعنی عمل جمع نسبت به ضرب دارای خاصیت پخشی نیست. درزیر خاصیت پخشی اجتماع نسبت به اشتراك و برعکس را می‌بینید.

برای هرسه مجموعهٔ A و B و C داریم:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

ابتدا درستی خــواص فوق را بــا استفاده از یك مثال و همچنین بوسیله نمودار ون تحقیق می‌کنیم:

تحقیق درستی خاصیت پخشی به‌وسیلهٔ یك مثال

مثال – برای سه مجموعهٔ:

$$A = \{ ۱ ، ۲ ، ۳ \}$$
$$B = \{ ۲ ، ۵ ، ۷ \}$$
$$C = \{ ۱ ، ۴ ، ۷ \}$$

نشان دهید که:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad (۱)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad (۲)$$

حل: برای تحقیق درستی این تساوی‌ها ، مجموعه‌های طرفین آنها را می‌نویسیم:

$$A \cup B = \{۱ ، ۲ ، ۳\} \cup \{۲ ، ۵ ، ۷\}$$
$$= \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷\}$$
$$A \cup C = \{۱ ، ۲ ، ۳\} \cup \{۱ ، ۴ ، ۷\}$$
$$= \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۷\}$$
$$B \cup C = \{۲ ، ۵ ، ۷\} \cup \{۱ ، ۴ ، ۷\}$$
$$= \{۱ ، ۲ ، ۴ ، ۵ ، ۷\}$$

$$A \cap B = \{۱ ، ۲ ، ۳\} \cap \{۲ ، ۵ ، ۷\}$$
$$= \{۲\}$$
$$A \cap C = \{۱ ، ۲ ، ۳\} \cap \{۱ ، ۴ ، ۷\}$$
$$= \{۱\}$$
$$B \cap C = \{۲ ، ۵ ، ۷\} \cap \{۱ ، ۴ ، ۷\}$$
$$= \{۷\}$$

مجموعهٔ طرف چپ تساوی (۱) $= A \cap (B \cup C)$

$$= \{۱ ، ۲ ، ۳\} \cap \{۱ ، ۲ ، ۴ ، ۵ ، ۷\}$$
$$= \{۱ ، ۲\}$$

مجموعهٔ طرف راست تساوی (۱) $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$= \{۲\} \cup \{۱\}$$
$$= \{۱ ، ۲\}$$

دیده می‌شود که این دو مجموعه یکی هستند، یعنی تساوی (۱) درست است. به‌همین‌ترتیب برای تحقیق در درستی (۲) می‌نویسیم.

مجموعهٔ طرف چپ تساوی (۲) $= A \cup (B \cap C)$

$$= \{۱ ، ۲ ، ۳\} \cup \{۷\}$$
$$= \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۷\}$$

مجموعهٔ طرف راست تساوی (۲) $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$

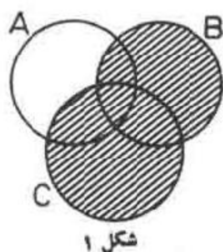
$$= \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷\} \cap \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۷\}$$
$$= \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۷\}$$

تمرین – درستی خواص پخشی را برای سه مجموعهٔ زیر نشان دهید.

$$A = \{a ، b\}$$
$$B = \{a ، c ، d\}$$
$$C = \{c ، e\}$$

تحقیق درستی خاصیت‌پخشی با استفاده از نمودار ون

ابتدا درستی :

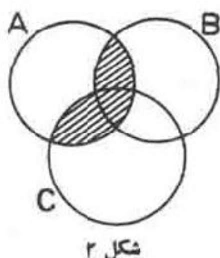


شکل ۱

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

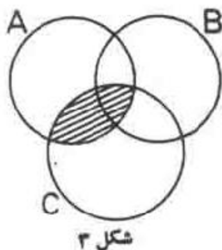
را تحقیق می کنیم .

در شکل ۱ ، مجموعهٔ $B\cup C$ با سایه مشخص شده است .



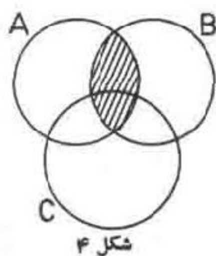
شکل ۲

در شکل ۲ ، مجموعهٔ $A\cap(B\cup C)$ باسایه نشان‌داده‌شده‌است



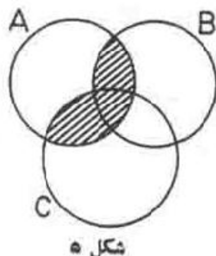
شکل ۳

در شکل ۳ ، مجموعهٔ $A\cap C$ با سایه نشان داده شده است .



شکل ۴

در شکل ۴ ، مجموعهٔ $A\cap B$ با سایه نشان داده شده است .



شکل ۵

در شکل ۵ ، مجموعهٔ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ، با سایه نشان داده شده است .

شکلهای ۲ و ۵ یك ناحیه را مشخص می‌سازند . لذا ، دومجموعهٔ $A\cap(B\cup C)$ و $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ متساویند .

تمرین ــ با روش فوق درستی تساوی زیر را تحقیق کنید:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

اثبات درستی خاصیت پخشی

درستی خاصیت پخشی اجتماع نسبت بـه اشتراك و برعکس را، بـا مثال و نمودار تحقیق کردیم . اکنون درستی:

را اثبات می‌کنیم . $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

اولا فرض کنیم ، $x\in A\cap(B\cup C)$

تعریف اشتراك : $x\in A\cap(B\cup C)\Longrightarrow x\in A\wedge x\in B\cup C$

تعریف اجتماع : $\Longrightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)$

توزیع‌پذیری $\wedge$ بر $\vee$: $\Longrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$

تعریف اشتراك : $\Longrightarrow (x\in A\cap B)\vee(x\in A\cap C)$

$\Longrightarrow x\in[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$

پس طبق تعریف زیر مجموعه داریم :

$$[A\cap(B\cup C)]\subset[(A\cap B)\cup(A\cap C)] \qquad (۱)$$

ثانیاً فرض کنیم : $x\in[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$:

تعریف اجتماع : $x\in[(A\cap B)\cup(A\cap C)]\Longrightarrow x\in(A\cap B)\vee x\in(A\cap C)$

تعریف اشتراك : $\Longrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$

توزیع $\wedge$ بر $\vee$: $\Longrightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)$

تعریف اجتماع : $\Longrightarrow x\in A\wedge(x\in B\cup C)$

تعریف اشتراك : $\Longrightarrow x\in A\cap(B\cup C)$

پس طبق تعریف زیر مجموعه خواهیم داشت :

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C) \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود : $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

تمرین ــ با استفاده از همین روش ثابت کنید که: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

مثال ۱ـ نشان دهید :

$$A'\cap(A\cup B)=B-A$$

حل : طرف چپ این تساوی را ساده می کنیم تا طرف راست به‌دست‌آید :

$$A'\cap(A\cup B)=(A'\cap A)\cup(A'\cap B)$$ خاصیت پخشی :

$$=\varnothing\cup(A'\cap B)$$ چرا ؟

$$=A'\cap B$$ چرا ؟

$$=B\cap A'$$ چرا ؟

$$=B-A$$ چرا ؟

مثال ۲- نشان دهید:

$$A\cup(B'-A)=A\cup B'$$

حل: مثل تمرین قبل عمل می‌کنیم :

$$A\cup(B'-A)=A\cup(B'\cap A')$$ چرا؟

$$=(A\cup B')\cap(A\cup A')$$ خاصیت پخشی :

$$=(A\cup B')\cap M$$ چرا ؟

$$=A\cup B'$$ چرا ؟

مثال ۳- نشان دهید :

$$A\cup(A\cap B)=A$$

حل : می‌دانیم که $A\cap M=A$ هرگاه درطرف چپ این تساوی به‌جای مجموعهٔ **A** بیرون پرانتز ، مجموعهٔ $A\cap M$ را قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$A\cup(A\cap B)=(A\cap M)\cup(A\cap B)$$

$$=A\cap(M\cup B)$$ خاصیت پخشی :

$$=A\cap M$$ چرا ؟

$$=A$$ چرا ؟

مثال ۴- نشان دهید :

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$$

($(A-B)\cup(B-A)$ را تفاضل متقارن **A** و **B** می‌نامند)

حل : دراین‌تمرین طرف راست را ساده می کنیم تا طرف چپ به‌دست‌آید. برای این‌منظور $A\cup B$ را یک مجموعه فرض نموده وآنرا نسبت به $(A'\cup B')$ پخش می کنیم:

$$(A\cup B)\cap(A'\cup B')=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']$$

$$=[A'\cap(A\cup B)]\cup[B'\cap(A\cup B)]$$ چرا ؟

خاصیت‌پخشی: $=[(A'\cap A)\cup(A'\cap B)]\cup[(B'\cap A)\cup(B'\cap B)]$

چرا ؟ $=[\varnothing\cup(A'\cap B)]\cup[(B'\cap A)\cup\varnothing]$

چرا ؟ $=(A'\cap B)\cup(B'\cap A)$

چرا ؟ $=(B\cap A')\cup(A\cap B')$

چرا ؟ $=(A\cap B')\cup(B\cap A')$

چرا ؟ $=(A-B)\cup(B-A)$

تمرین

۱- برای مجموعه‌های $A=\{a , b , c , d\}$ ، $B=\{a , b , f\}$ و $C=\{a , f , g\}$ درستی تساویهای زیررا نشان دهید :

الف - $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ ب - $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

۲- مجموعه‌های $P=\{p , q , r , t\}$ ، $Q=\{q , r , s\}$ و $R=\{p , m , n\}$ را در نظر بگیرید ، آن‌گاه نشان دهید که :

$$P\cap(Q-R)=(P\cap Q)-(P\cap R)$$

(خاصیت پخشی اشتراک نسبت به تفاضل)

۳ - هرگاه A و B دومجموعهٔ جدا ازهم باشند ثابت‌کنید که $A-B=A$

۴ - هرگاه A و B دومجموعهٔ جدا از هم باشند ثابت‌کنید که :

$$B'\cap(A\cup B)=A$$

۵ - ثابت کنید :

الف - $A\cap(B-A)=\varnothing$ ب - $(B-A)\cap(A\cap B)=\varnothing$

ج - $A\cup(B-A)=A\cup B$ د - $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

ه - $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

۶- اگر $A\subset B$ ، ثابت‌کنید که

$$A\cup(B-A)=B$$

۷- ثابت کنید:

الف - $(A\cap B)\cup(A\cap B')=A$

ب - $(A'\cup B')\cap(A'\cup B)=A'$

ج - $(A\cup B)\cup(A-B)=A\cup B$

د - $A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$

ه - $A-B=B'-A'$

و ـ $A'-B=B'-A$

ز ـ $A\cap(A-B')=A\cap B$

ح ـ $A\cup(B\cap C\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup D)$

ط ـ $A\cap(B\cup C\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)$

ی ـ $(A'\cup B')\cap(A'\cup B)\cap(A\cup B)=B-A$

قوانین دمرگان[1]

متمم یك مجموعه را قبلا دیدید ، اکنون می‌خواهیم متمم اجتماع دومجموعه ، $(A\cup B)'$ ، ومتمم اشتراك دومجموعه ، $(A\cap B)'$ ، را مورد بحث قرار دهیم . اولین کسی که این متممها را حساب کرد دمرگان ریاضی‌دان انگلیسی بود . دمرگان نشان داد که برای هردومجموعهٔ A و B تساویهای زیر برقرار است .

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$
$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$

یعنی :

متمم اجتماع دو مجموعه مساوی اشتراك متممهای آنهاست و متمم اشتراك دو مجموعه مساوی اجتماع متممهای آنها می‌باشد .

ابتدا درستی این‌قوانین را به‌وسیلهٔ یك مثال وهمچنین با استفاده از نمودار ون تحقیق‌می‌کنیم

تحقیق درستی قوانین دمرگان بوسیله یك مثال

مثال ـ مجموعه‌های $A=\{a ، e ، i\}$ و $B=\{a ، u\}$ از مجموعهٔ مرجع $M=\{a ، e ، i ، o ، u\}$ را در نظرگرفته درستی‌رابطه‌های زیر را تحقیق کنید.

$$(A\cup B)'=A'\cap B' \qquad (۱)$$
$$(A\cap B)'=A'\cup B' \qquad (۲)$$

1- DE MORGAN (Augustus)

حل : مجموعه‌های طرفین تساویها را می‌نویسیم :

$$A\cup B=\{a ، e ، i\}\cup\{a ، u\}$$
$$=\{a ، e ، i ، u\}$$

$$A\cap B=\{a ، e ، i\}\cap\{a ، u\}$$
$$=\{a\}$$

$$A'=\{o ، u\} \quad ; \quad B'=\{e ، i ، o\}$$

مجموعهٔ طرف چپ تساوی (۱) $=(A\cup B)'$

$$=\{\cancel{a} ، \cancel{e} ، \cancel{i} ، o ، \cancel{u}\}$$
$$=\{o\}$$

مجموعهٔ طرف راست تساوی (۱) $=A'\cap B'$

$$=\{o ، u\}\cap\{e ، i ، o\}$$
$$=\{o\}$$

دیده می‌شود که این دومجموعه مساویند . همچنین در زیر تساوی دو مجموعهٔ $(A\cap B)'$ و $A'\cup B'$ را می‌بینید .

مجموعهٔ طرف چپ تساوی (۲) $=(A\cap B)'$

$$=\{\cancel{a} ، e ، i ، o ، u\}$$
$$=\{e ، i ، o ، u\}$$

مجموعهٔ طرف راست تساوی (۲) $=A'\cup B'$

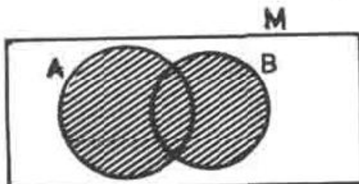
$$=\{o ، u\}\cup\{e ، i ، o\}$$
$$=\{e ، i ، o ، u\}$$

تحقیق درستی قوانین دمرگان با استفاده از نمودار وِن

ابتدا درستی :

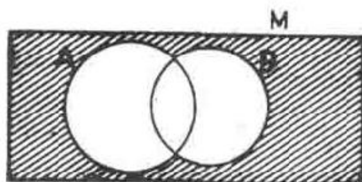
$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

را نشان می‌دهیم .



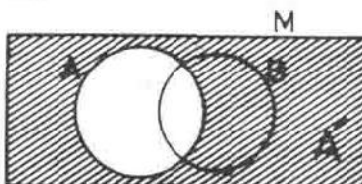
شکل ۱

درشکل ۱ ، مجموعهٔ $A\cup B$ با سایه نشان داده شده است .



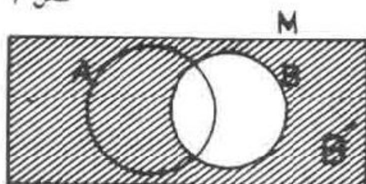
شکل ۲

در شکل ۲ ، مجموعهٔ $(A \cup B)'$ با سایه مشخص شده است .



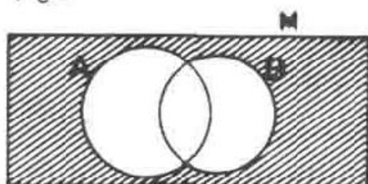
شکل ۳

در شکل ۳ ، مجموعهٔ A' با سایه نشان داده شده است .



شکل ۴

در شکل ۴ ، مجموعهٔ B' با سایه نشان داده شده است .



شکل ۵

در شکل ۵ ، مجموعهٔ $A' \cap B'$ با سایه مشخص شده است .

شکلهای ۲ و ۵ یك ناحیه را مشخص می‌سازند . یعنی مجموعه‌های $(A \cup B)'$ و $A' \cap B'$ مساویند .

تمرین ــ با استفاده از همین روش نشان دهید که :

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

اثبات درستی قوانین دمرگان

درستی قوانین دمرگان را با مثال ونمودار دیدید . اکنون درستی تساوی ، $(A \cup B)' = A' \cap B'$ را اثبات می‌کنیم .

اولا فرض‌کنیم ، $x \in (A \cup B)'$ داریم :

تعریف متمم : $x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin A \cup B$

تعریف اجتماع : $\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

تعریف متمم : $\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B'$

تعریف اشتراك : $\Rightarrow x \in A' \cap B'$

پس طبق تعریف زیر مجموعه داریم :

$$(A\cup B)'\subset A'\cap B' \qquad (۱)$$

ثانیاً فرض کنیم ، $x\in A'\cap B'$ داریم :

تعریف اشتراك : $x\in A'\cap B' \Rightarrow x\in A' \wedge x\in B'$

تعـریف متمم : $\Rightarrow x\notin A \wedge x\notin B$

تعریف اجتماع : $\Rightarrow x\notin (A\cup B)$

تعـریف متمـم : $\Rightarrow x\in (A\cup B)'$

پس طبق تعریف زیر مجموعه داریم :

$$A'\cap B'\subset (A\cup B)' \qquad (۲)$$

ازمقایسهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$(A\cup B)' = A'\cap B'$$

تمرین – با استفاده از همین روش ثابت کنید که :

$$(A\cap B)' = A'\cup B'$$

مثال ۱- نشان دهید :

$$A' - B = (A\cup B)'$$

حل : مجموعهٔ طرف چپ تساوی را ساده می‌کنیم تا طرف راست به‌دست آید :

چرا ؟ $A' - B = A'\cap B'$

قانون دمرگان : $= (A\cup B)'$

مثال ۲- نشان دهید :

$$(A\cup B)\cap(A'\cap B') = \varnothing$$

حل : مثل تمرین قبل عمل می‌کنیم :

$$(A\cup B)\cap(A'\cap B') = (A\cup B)\cap(A\cup B)'$$

اگر $A\cup B = X$ بگیریم نتیجه می‌شود $= X\cap X'$

چرا ؟ $= \varnothing$

مثال ۳ – هرگاه $A\subset B$ باشد . نشان دهید که $B'\subset A'$

حل : دیدید که «از $A\subset B$ نتیجه می‌شود $A\cup B = B$ و $A\cap B = A$ وبرعکس» با توجه

به‌این نکته از فرض نتیجه می‌شود :

$$A \cup B = B$$

یا : $(A \cup B)' = B'$

قانون دمرگان : $A' \cap B' = B'$

در نتیجه : $B' \subset A'$

مثال ۴ـ نشان دهید :

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

(توزیع‌پذیری اشتراك نسبت به‌تفاضل)

حل : طرف راست تساوی را ساده می‌کنیم تا طرف چپ به‌دست آید :

چرا ؟ $(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$

قانون دمرگان : $= (A \cap B) \cap (A' \cup C')$

چرا ؟ $= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$

چرا ؟ $= [A' \cap (A \cap B)] \cup [(A \cap B) \cap C']$

چرا ؟ $= [(A' \cap A) \cap B] \cup [(A \cap (B \cap C')]$

چرا ؟ $= [\varnothing \cap B] \cup [A \cap (B \cap C')]$

چرا ؟ $= \varnothing \cup [A \cap (B \cap C')]$

چرا ؟ $= A \cap (B \cap C')$

چرا ؟ $= A \cap (B - C)$

تمرین

۱ ـ مجموعه‌های $P = \{q , r , s\}$ و $Q = \{k , r , m\}$ از مجموعهٔ مرجع $M = \{k , m , q , r , s , t\}$ را درنظر گرفته نشان دهید که :

$$(P \cup Q)' = P' \cap Q' \quad ؛ \quad (P \cap Q)' = P' \cup Q' \quad ؛ \quad (P - Q)' = Q \cup P'$$

۲ ـ مجموعه‌های $A = \{a , b , c , d , e\}$ و $B = \{a , b , f\}$ و $C = \{f , g , h\}$ را در نظر گرفته نشان دهید که :

الف ـ $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

ب ـ $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

۳ـ ثابت‌کنید :

الف ـ $(A - B)' = B \cup A'$

ب- $(A\cup B\cup C)'=A'\cap B'\cap C'$

ج- $(A\cap B\cap C)'=A'\cup B'\cup C'$

د- $A-(A\cap B)=A-B$

هـ- $(A'\cup B')'=A\cap B$

و- $(A'\cap B')'=A\cup B$

ز- $(A\cup B)'-C=(A\cup B\cup C)'$

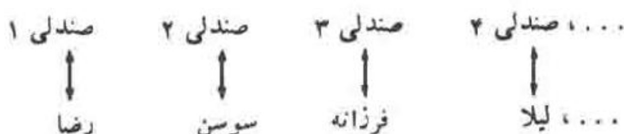
ح- $(A\cup B'\cup C')\cap[A\cup(B\cap C)]=A$

ط- $(A\cup B)-(B\cup C)=(A-B)-C$

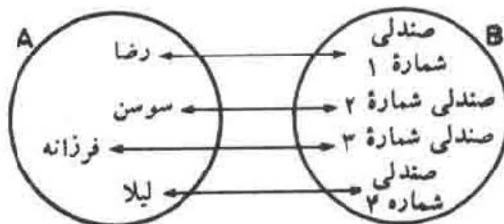
تناظر یك به یك

قبل از تعریف تناظر یك به یك بمثالهای زیر توجه کنید .

مثال ۱ - صندلیهای تالار یك مدرسه طوری است که هر دانش‌آموز روی یك صندلی می‌نشیند و هر صندلی مخصوص یك دانش‌آموز است . یعنی ، بعداز نشستن دانش‌آموزان روی صندلیها ، صندلی خالی درتالار باقی نمی‌ماند ، درضمن هیچ دانش‌آموزی نیز بی‌صندلی وایستاده نیست . تحت این شرایط گفته می‌شود بین مجموعهٔ صندلیهای تالار و مجموعهٔ دانش‌آموزان یك تناظر یك به یك وجود دارد . این تناظر را بصورتهای زیرنشان می‌دهند .

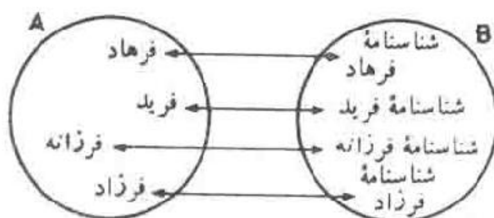


رضا ⟷ صندلی ۱ ، سوسن ⟷ صندلی ۲ ، فرزانه ⟷ صندلی ۳ ، لیلا ⟷ صندلی ۴ ، . .



مثال ۲ - بین مجموعهٔ شناسنامه‌های موجود در ایران ومجموعهٔ مردم ایران یك تناظر یك

به یك وجود دارد .یعنی هرشناسنامه متعلق به‌یك نفر و هر نفر قانوناً یك شناسنامه دارد .

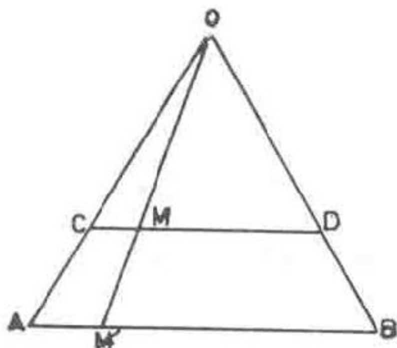


تعریف ــ بین دومجموعهٔ A و B یك تناظر یك به یك وجود دارد هرگاه بتوان به هر عضو A یك و تنها یك عضو B و به هرعضو B یك و تنها یك عضو A را نسبت داد.

مثال ۳ ــ بین مجموعهٔ اعداد طبیعی و اعداد زوج مثبت یك تناظر یك به‌یك وجود دارد .



مثال ۴ ــ دو پاره‌خط AB و CD غیر متساوی و متوازیند . از A به C و از B به D وصل کرده امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند . نقطهٔ دلخواه M را روی CD در نظرگرفته خط OM را امتداد می‌دهیم تا AB را در M' قطع کند . نقطهٔ M' نظیر M روی AB است . چون M نقطهٔ دلخواهی است به این ترتیب هر نقطه روی CD در نظر گرفته شود ، می‌توان نظیر آن را روی AB به دست آورد . و هیچ نقطه‌ای روی CD وجود ندارد که نظیر آن روی AB نباشد . همچنین نظیر هر نقطهٔ دلخواه M' از AB یك نقطهٔ M روی CD وجود دارد. به عبارت دیگر، بین مجموعهٔ نقاط این دو پاره‌خط یك تناظر یك به‌یك وجود دارد.



دو مجموعهٔ هم ارز (معادل)

در مثالهای فوق :

ــ مجموعهٔ صندلیهای تالار ، با مجموعهٔ دانش آموزان هم‌ارز می باشد .

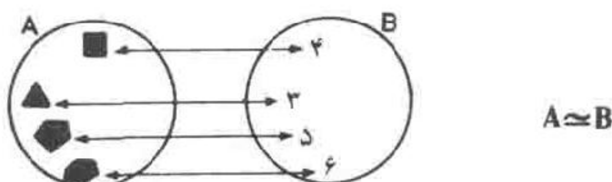
ــ مجموعهٔ مردم ایران ، با مجموعهٔ شناسنامه‌های آنها هم‌ارز می‌باشد .

ــ مجموعهٔ اعداد طبیعی با مجموعهٔ اعداد زوج مثبت هم‌ارز است .

ــ مجموعهٔ نقاط پاره‌خط AB با مجموعهٔ نقاط پاره‌خط CD هم‌ارز است .

تعریف – دو مجموعهٔ A و B را هم‌ارز یا معادل گویند ، هرگاه یک تناظر یک به یک بین عضوهای آنها وجود داشته باشد .

دومجموعهٔ A و B را که هم ارز باشند بصورت زیر نمایش می‌دهند .



$A \simeq B$

آیا مجموعهٔ حروف الفبای فارسی با مجموعهٔ اعداد { ۳۲ ، ... ، ۳ ، ۲ ، ۱ } هم‌ارز است ؟

مجموعه‌های متناهی (با پایان) و نامتناهی (بی پایان)

اولین تقسیم بندی و تمایز مجموعه‌ها تقسیم آنها به مجموعه‌های متناهی و نامتناهی است .

مجموعه‌های زیر متناهی هستند :

$\varnothing$ ؛ {a} ؛ {۱} ؛ {۲ ، ۱} ؛ {سوسن ، رضا} ؛ {a ، b} ؛ {a ، b ، c}

روشن است که عضوهای مجموعهٔ متناهی :

$A = \{a , b , c , d , e\}$

را می‌توان شمرد و گفت ۵ عضو دارد . این شمردن درحقیقت ایجاد یك تناظر یك به‌یك بین عضوهای مجموعهٔ A و مجموعهٔ {۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱} ، است . یعنی :

a ، b ، c ، d ، e

↕ ↕ ↕ ↕ ↕

۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵

یا

$\{a , b , c , d , e\} \simeq$ {۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱}

همچنین وقتی می‌گوییم عضوهای مجموعهٔ :

$B = \{a , b , c , d , e , \ldots , x , y , z\}$

را شمرده‌ایم و دارای ۲۶ عضو است ، باز بین عضوهای مجموعهٔ B ومجموعهٔ اعداد طبیعی ازیك تا ۲۶ یك تناظر یك به یك درنظر گرفته‌ایم :

a ، b ، c ، d ، e ، ... ، x ، y ، z

↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕

۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ... ، ۲۴ ، ۲۵ ، ۲۶

یا

$\{a , b , c , d , e , \ldots , x , y , z\} \simeq \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , \ldots , ۲۴ , ۲۵ , ۲۶\}$

اگر مجموعهٔ مفروضی مثل C دارای k عضو باشد ، (k عدد طبیعی است) در این صورت :

$$C \simeq \{۱ , ۲ , ۳ , \ldots , k\}$$

هر کدام از مجموعه‌های :

$$\{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\} , \{۱ , ۲ , ۳ , \ldots , ۲۶\} , \{۱ , ۲ , ۳ , \ldots , k\}$$

را یك قطعه اعداد طبیعی نامیده آنها را به صورتهای زیر نشان می‌دهند :

$$N_{۵} = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\} , N_{۲۶} = \{۱ , ۲ , ۳ , \ldots , ۲۶\} , N_k = \{۱ , ۲ , ۳ , \ldots , k\}$$

(N_k قطعه اعداد طبیعی در حالت کلی است)

تعریف ـ یك مجموعه متناهی است هرگاه تهی بوده یا هم‌ارز قطعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی باشد.

باید دانست که عضوهای مجموعهٔ متناهی ممکن است خیلی زیاد باشد . مثلا مجموعهٔ تمام دانه‌های شن موجود روی کرهٔ زمین یك مجموعهٔ متناهی است . اگر قطعهٔ N_k برای شمردن این مجموعه به‌کار برود روشن است که k عدد بسیار بزرگی خواهد بود .

هرمجموعه‌ای که متناهی نباشد نامتناهی خوانده می‌شود . مجموعه‌های زیر نامتناهی‌هستند .

$$N = \{۱ , ۲ , ۳ , \ldots\} , E = \{۲ , ۴ , ۶ , \ldots\} , F = \{۱ , ۳ , ۵ , \ldots\}$$

مجموعهٔ اعداد حقیقی بین صفر و یك نیز نامتناهی است . همچنین مجموعهٔ نقاط یك پاره‌خط یك مجموعهٔ نامتناهی می‌باشد.

عدهٔ عضوهای مجموعهٔ متناهی (عدد اصلی یا عدد یك مجموعه)

دیدید که مجموعهٔ A را متناهی گویند ، هرگاه A تهی بوده یا با یکی از مجموعه‌های N_k هم‌ارز باشد :

$$A \simeq N_k$$

k را عدهٔ عضوها یا عدد اصلی مجموعهٔ A خوانده آن را با n(A) نمایش می‌دهند .

$$n(A) = k$$

طبق آنچه راجع به‌مجموعه‌های هم ارز گفته شد می‌توان نوشت :

$N_۱ \simeq \ldots \simeq$ {تهران} $\simeq$ {سیب} $\simeq$ {رضا} $\simeq \{a\} \simeq \{۲\}$

$N_۲ \simeq \ldots \simeq$ {تهران ، اصفهان} $\simeq$ {گلابی ، سیب} $\simeq$ {رضا ، سوسن} $\simeq \{a , b\} \simeq \{۲ , ۳\}$

$N_۳ \simeq \ldots \simeq$ {تهران، اصفهان، مشهد} $\simeq$ {فرزانه ، رضا، سوسن} $\simeq \{a , b , c\} \simeq \{۱ , ۲ , ۳\}$

. . . .

. . . .

$A \simeq B \simeq C \simeq ، ... ، \simeq N_k$

یعنی ۱، عدداصلی تمام مجموعه‌های یک‌عضوی است . ۲، عدد اصلی تمام مجموعه‌های دو عضوی است . ۳ ، عدد اصلی تمام مجموعه‌های سه عضوی است ، . . . و k عدد اصلی تمام مجموعه‌های k عضوی است . عدد اصلی مجموعهٔ تهی چیست ؟

به‌طور کلی در مورد عدد اصلی مجموعه‌ها کافی است بدانیم که :

اگر دو مجموعه هم‌ارز باشند ، اعداد اصلی آنها مساوی است و برعکس اگر اعداد اصلی دومجموعه مساوی باشند ، آن‌گاه دو مجموعه هم‌ارز می‌باشند .

مثال ۱ – دومجموعهٔ $A=\{a ، b ، c\}$ و $B=\{d ، e ، f ، g ، h\}$ داده شده‌اند . عدد اصلی مجموعهٔ $A \cup B$ را حساب کنید .

حل : مجموعهٔ $A \cup B$ را می‌نویسیم :

$$A \cup B=\{a ، b ، c\} \cup \{d ، e ، f ، g ، h\}$$
$$=\{a ، b ، c ، d ، e ، f ، g ، h\}$$

دیده می‌شود که : $n(A \cup B)=۸$

همچنین داریم : $n(A)=۳$

$n(B)=۵$

و

$۸=۳+۵$

روشن است که : $\mathbf{n(A \cup B)=n(A)+n(B)}$

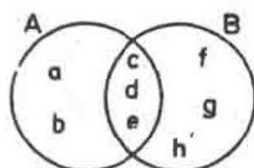
یا

در حالت کلی می‌توان نشان داد که[1]

هرگاه A و B دو مجموعهٔ متناهی و جدا از هم باشند ، مجموعهٔ $A \cup B$ متناهی بوده و داریم :

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)$$

مثال ۲ – برای دومجموعهٔ $A=\{a ، b ، c ، d ، e\}$ و $B=\{c ، d ، e ، g ، h ، f\}$ ، $n(A \cup B)$ را حساب کنید .



حل : مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ را می‌نویسیم :

$$A \cup B=\{a ، b ، c ، d ، e\} \cup \{c ، d ، e ، g ، h ، f\}$$
$$=\{a ، b ، c ، d ، e ، f ، g ، h\}$$

۱– دراین سطح ما از ذکر استدلال خودداری می‌کنیم .

$$A \cap B = \{a , b , c , d , e\} \cap \{c , d , e , f , g , h\}$$
$$= \{c , d , e\}$$

- دیده می‌شود که : $n(A \cup B) = ۸$

و $n(A \cap B) = ۳$

همچنین داریم : $n(A) = ۵$

و $n(B) = ۶$

روشن است که می‌توان نوشت :

$$۸ = ۵ + ۶ - ۳$$

یا
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

درحالت کلی می‌توان نشان داد که :

هرگاه A و B دومجموعهٔ متناهی دلخواه باشند داریم :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

استفاده از عدد اصلی مجموعه‌ها در حل بعضی از مسائل حساب

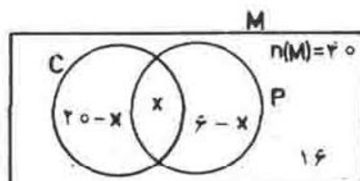
مثال ۱ – ضمن مصاحبه با ۴۰ نفر ازکارمندان یك اداره معلوم شد که ۲۰ نفر دارای تحصیلات دانشگاهی و ۶ نفر صاحب اتومبیل هستند و ۱۶ نفر نه دارای تحصیلات دانشگاهی و نه صاحب اتومبیل می‌باشند. در صورتی که C مجموعهٔ کارمندان دارای تحصیلات دانشگاهی و P مجموعهٔ کارمندان صاحب اتومبیل باشد. مطلوب است محاسبهٔ :

$$n(C') \ ؛ \ n(P') \ ؛ \ n(C) + n(P) \ ؛ \ n(C \cup P) \ ؛ \ n(C \cap P)$$

حل : طبق فرض $n(P) = ۶$ و $n(C) = ۲۰$ ، درنتیجه خواهیم داشت[1] :

$$n(C') = ۲۰ \ \text{و} \ n(P') = ۳۴$$

$$n(C) + n(P) = ۲۰ + ۶$$
$$= ۲۶$$
$$n(C \cup P) = ۴۰ - ۱۶$$
$$= ۲۴$$
$$n(C \cup P) = n(C) + n(P) - n(C \cap P)$$



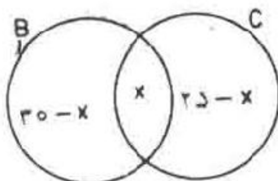
۱ــ درحل ، اعدادی که داخل نمودارهای مجموعه‌ها نوشته شده است ، تعداد عضوهاست نه خود عضوها

یا

$$n(C\cap P)=n(C)+n(P)-n(C\cup P)$$
$$=۲۰+۶-۲۴$$
$$=۲$$
$$\boxed{x=۲}$$

مثال ۲ – در یک کلاس ۴۵ نفر دانش‌آموز است . هر کدام از این دانش‌آموزان کفش مشکی یا کت قهوه‌ای پوشیده‌اند. درصورتی که بدانیم ۳۰ نفر کفش مشکی و ۲۵ نفر کت قهوه‌ای پوشیده‌اند ، تعیین کنید چند نفر کفش مشکی و کت قهوه‌ای پوشیده‌اند .

حل : مجموعهٔ دانش‌آموزانی را که کفش مشکی پوشیده‌اند به B ومجموعهٔ دانش‌آموزانی را که کت قهوه‌ای به تن دارند به C نمایش می‌دهیم .



طبق فرض داریم :

$$n(B)=۳۰ \;؛\; n(C)=۲۵ \;؛\; n(B\cup C)=۴۵$$

همچنین داریم :

$$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$$

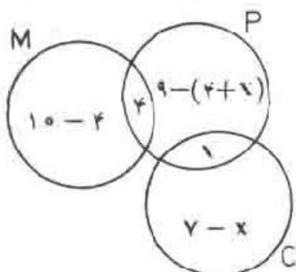
یا

$$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$$
$$=۳۰+۲۵-۴۵$$
$$=۱۰$$
$$\boxed{x=۱۰}$$

مثال ۳ – از یک گروه ۲۰ نفری دبیران علوم ، ۱۰ نفر ریاضی ، ۹ نفر فیزیک و ۷ نفر شیمی تدریس می کنند . درصورتی که بدانیم ۴ نفر از دبیران فیزیک وریاضی تدریس می کنند وهیچ کدام از دبیران ریاضی درس شیمی نمی‌دهند معلوم کنید :

الف – تعداد معلمینی که فیزیک وشیمی درس می‌دهند . ب – تعداد معلمینی که فقط فیزیک تدریس می‌نمایند .

حل : مجموعه‌های معلمین ریاضی ، فیزیک و شیمی را به ترتیب بـه M ، P و C نمایش می‌دهیم . دراین صورت خواهیم داشت :



$$n(M\cup P\cup C)=۲۰ \;؛\; n(M)=۱۰$$
$$n(P)=۹ \;؛\; n(C)=۷ \;؛$$
$$n(M\cap P)=۴ \;؛\; n(M\cap C)=۰$$
$$n(P\cap C)=?$$

با روشی متشابه آنچه در مورد $n(A \cup B)$

گفته شد نشان داده می‌شود که :

$$n(M \cup P \cup C) = n(M) + n(P) + n(C) - n(M \cap P) - n(M \cap C) - n(P \cap C) + n(M \cap P \cap C)$$

با توجه به‌این فرمول و مفروضات مسئله خواهیم داشت :

$$۲۰ = ۱۰ + ۹ + ۷ - ۴ - ۰ - n(P \cap C) + ۰$$

یا

$$n(P \cap C) = ۲$$

یعنی تعداد معلمینی که فیزیك وشیمی درس می‌دهند مساوی ۲ می‌باشد وتعداد معلمینی که نقط فیزیك درس می‌دهند عبارت است از : $۹ - (۴ + ۲) = ۳$

راه حل دوم ــ مجموع تمام عضوهای مجموعه‌هایی که در شکل بالا نشان داده شده‌اند مساوی ۲۰ قرار می‌دهیم :

$$(۱۰ - ۴) + ۴ + ۹ - (۴ + x) + x + ۷ - x = ۲۰$$

از حل معادله به‌دست می‌آید . $x = ۲$

تمرین

۱ــ کدام یك ازمجموعه‌های زیر متناهی‌است ؟

الف ــ مجموعهٔ کتابهایی که از بدو خلقت تا کنون به زبانهای موجود روی زمین منتشر شده است .

ب ــ مجموعهٔ $\{۲^x \mid x \in N\}$

ج ــ مجموعهٔ مضربهای مثبت ۱۰

د ــ مجموعهٔ اعداد اول

هـ ــ مجموعهٔ کتابهایی که درحال حاضر درکتابخانه‌های روی زمین موجود است .

و ــ مجموعهٔ تارهای موهای مردم روی زمین

ز ــ مجموعهٔ $\{-x \mid x \in N\}$

۲ــ مجموعه‌هایی ذکر کنید که با مجموعه‌های زیردارای یك عدد اصلی باشند .

الف ــ مجموعهٔ کلیدهای اتاقهای یك هتل

ب ــ مجموعهٔ اعداد زوج از یك تا صد

ج ــ مجموعهٔ اعداد صحیح مربع‌کامل واقع بین ۲ و ۱۷۰

د ــ مجموعهٔ مضربهای ۳

۳ ــ در یك کلاس ۲۵ نفر دانش‌آموز است . ۱۶ نفر از این دانش‌آموزان در تیم فوتبال

مدرسه و ۱۲ نفر در تیم والیبال عضویت دارند . دو نفر از این دانش‌آموزان نیز عضو هیچ تیم ورزشی نیستند . تعیین کنید چند نفر از دانش‌آموزان عضو مشترك تیمهای والیبال و فوتبال مدرسه هستند .

۴ – ۲۰۰ نفر از دانش‌آموزان یك دبیرستان درفیزیك یا شیمی تجدید هستند . درصورتی که بدانیم ۱۵۰ نفر در فیزیك و ۱۳۰ نفر در شیمی تجدید دارند . تعیین کنید چند نفر در هر دو درس تجدید هستند .

۵ – یك باشگاه ورزشی ۵۰ نفرعضو دارد . ۱۵ نفر عضو تیم بسکتبال و۲۰ نفر عضوتیم والیبال و ۲۰ نفرعضو تیم فوتبال باشگاه می‌باشند . در ضمن سه نفر عضو مشترك تیمهای بسکتبال و والیبال و ۶ نفر عضو مشترك تیمهای والیبال و فوتبال و ۵ نفر عضو مشترك تیمهای بسکتبال وفوتبال می‌باشند . ۷ نفر نیز عضو هیچ تیم باشگاه نیستند . تعیین کنید : الف – تعداد افرادی که فقط عضوتیم فوتبال می‌باشند . ب – تعداد افرادی که فقط عضو تیم بسکتبال هستند .

۶ – ۵۰ نفر دانش‌آموز دریك کلاس تقویتی ثبت نام کرده‌اند . ۱۸ نفرازآنها شیمی و۱۷ نفر زبان خارجه و ۲۴ نفر فیزیك و تمام آنها ریاضی می‌خوانند . از طرفی ۵ نفرفیزیك وشیمی ، ۷ نفر فیزیك وزبان ، و ۶ نفر شیمی و زبان و دونفر تمام این مواد را می‌خوانند . تعیین کنید چندنفر فقط درس ریاضی می‌خوانند .

۷ – از صد دستگاه اتومبیل آزمایش فنی به عمل آمده است در نتیجه ۵۹ دستگاه سالم و بقیه نقایص زیررا داشته‌اند :

۱– نقص ترمزتنها	۱۲	دستگاه
۲– نقص ترمز وفرمان	۵	«
۳– نقص ترمز وچراغ	۸	«
۴– نقص چراغ وفرمان	۵	«
۵– نقص ترمزوفرمان وچراغ	۳	«

درضمن تعداد اتومبیلهایی که نقص فنی چراغ یا فرمان داشته‌اند مساویند . تعیین کنید :

اولا – تعداد اتومبیلهایی که نقص چراغ دارند .

ثانیاً – تعداد اتومبیلهایی که فقط یك نقص دارند .

تمرینات مختلف

۱– دومجموعهٔ $\varnothing$ و $\{\varnothing\}$ با هم چه فرقی دارند ؟

۲– ثابت کنید هرگاه $A-B=B-A$ ، آن‌گاه $A=B$.

۳– اگر $A\subset B$ ، ثابت کنیدکه :

الف – $B'\subset A'$ ؛ ب – $A'\cup B=M$ ؛ ج – $A\cap B'=\varnothing$

و برعکس (یعنی از الف ، ب ، یا ج نیز نتیجه می‌شود $A \subset B$)

۴ـ هرگاه $A \subset B$ و $C \subset D$ ، ثابت کنید که :

$$A \cup C \subset B \cup D \qquad A \cap C \subset B \cap D$$

۵ـ ثابت کنید هرگاه $A \subset B \subset C$ آن‌گاه ، $A \cup B = B \cap C$.

۶ ـ **ثابت کنید هرگاه A و B دومجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه** $(A' \cup B) \cap A = \varnothing$

۷ ـ **ثابت کنید هرگاه** $A - B = A$ ، آن‌گاه $B - A = B$

۸ـ ثابت کنید هرگاه $A \cup B = A - B$ ، آن‌گاه $B = \varnothing$.

۹ـ هرگاه $A \cap B = \varnothing$ ، ثابت کنید که :

$$(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$$

۱۰ـ **در چه صورت اجتماع دومجموعه مساوی اشتراک همان دومجموعه است .**

$$A \cup B = A \cap B$$

۱۱ـ ثابت کنید :

الف ـ $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$

ب ـ $B \cup (A - B) = A \cup B$

ج ـ $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

د ـ $A - (B \cup C) = (A - B) - C$

هـ ـ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

و ـ $A - (B - A) = A$

ز ـ $(B - A) \cup (A \cap B) = B$

ح ـ $[A \cup (A \cap B)] - [B \cap (B \cup A)] = A \cap B'$

ط ـ $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

ی ـ $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

یا ـ $A \cup B) - B = A - B$

یب ـ $A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

یج ـ $\cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$

ید ـ $B \cap C) \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C) = C$

۱۲ ـ **ثابت کنید که هرگاه $A \cap B = A \cap C$ و $A \cup B = A \cup C$ ، آن‌گاه $C =$**

۱۳ـ ثابت کنید هرگاه $X \subset A$ و $X \subset A'$ ، آن‌گاه $X = \varnothing$.

